Навчально-науковий інститут «Інститут геології»
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка
Кафедра гідрогеології та інженерної геології

**О. Кошляков**

# ОСНОВИ ДИНАМІКИ ПІДЗЕМНИХ ВОД

Підручник
для студентів спеціальності 103 «Науки про Землю»

Київ - 2023

УДК 556.3(057.8)

Рецензенти:

канд. геол. наук, доцент О. Диняк
канд. геол. наук, доцент Д. Чомко

*Рекомендовано до друку*
*вченою радою ННІ «Інститут геології»*
*(протокол № 12 від 13 червня 2023 року)*

**Кошляков О.**
Основи динаміки підземних вод : Підручник. – К. , 2023. – 165 с.

***Підручник розраховано на здобувачів спеціальності 103 «Науки про Землю», передусім на студентів Навчально-наукового інституту «Інститут геології» Київського національного університету імені Тараса Шевченка першого рівня вищої освіти, які вивчають дисципліну "Динаміка підземних вод"***

**© О. Кошляков, 2023**

# ВСТУП

Викладання дисципліни «Динаміка підземних вод» на геологічному факультеті Київського державного університету започатковано професором кафедри гідрогеології та інженерної геології І. Жерновим у 50-х роках минулого століття. У 1982 році І. Жернов видав перший в Україні навчальний посібник з дисципліни «Динаміка підземних вод», який був використаний автором в якості вихідного базового елементу при складанні цього підручника.

Згідно з І. Жерновим, *динаміка підземних вод* - це вчення про закономірності руху води (рідини) в гірських породах, яке розглядає систему «вода-порода».

Визначимо поняття «вода» та «гірська порода».

*Вода* - це рідина із надзвичайно аномальними властивостями. Вона має різний ізотопний склад, різну структуру, значну теплоємність, великий поверхневий натяг, малу в`язкість тощо. Вода - це універсальний розчинник по відношенню до мінеральних та органічних речовин. Тобто, у природі немає єдиної речовини під назвою «вода», а є велика кількість типів води (точніше, рідин) різного мінералогічного складу і властивостей.

*Гірська порода* - це багатокомпонентна система, що складається з твердих мінеральних та органічних частинок. Частинки є різними за складом, формою, розмірами та взаємним розташуванням, можуть бути вільно розташовані або зцементовані. Порода має здатність до фізичної, хімічної, фізико-хімічної взаємодії з водою, що в ній знаходиться. У результаті такої взаємодії мають місце вивітрювання, просадка, набухання та інші процеси.

У системі «вода-порода» часто присутня газоподібна фаза - повітря. Взаємодія води, породи та повітря викликає розвиток ще більш складних процесів у системі «вода - гірська порода - повітря».

З викладеного можна зробити висновок про складність вчення про рух води в гірських породах та прослідкувати взаємозв`язок динаміки підземних вод з іншими науками та вченнями.

З одного боку, динаміка підземних вод - це *розділ гідрогеології*, тому вона відноситься до наук *геологічного циклу*. Вона пов`язана з інженерною геологією, літологією, тектонікою та іншими геологічними напрямами, які є переважно описовими.

З іншого боку, динаміка підземних вод базується на *теорії фільтрації*, яка пов`язує динаміку підземних вод із *гідромеханікою* і *математикою*.

Крім того, підземні води пов`язані з поверхневими. Тому динаміка підземних вод тісно пов`язана з *гідрологією* - вченням *географічного* циклу.

Слід зауважити, що при вивченні переносу речовини і тепла підземними водами застосовуються відомості з *фізики*, *хімії* та інших наук.

## Основні етапи розвитку динаміки підземних вод

Виникнення динаміки підземних вод як *розділу гідромеханіки* пов`язують із роботами Гаспара де Проні та Г. Дарсі. В результаті дослідних робіт (фільтрація води в пісках) Г. Дарсі встановив основний закон фільтрації, який пізніше назвали його ім`ям. Результати досліджень Г. Дарсі надрукував у 1856 р.

На базі робіт Г. Дарсі в 1863 р. Ж. Дюпюі розробив теорію руху підземних вод і запропонував перші наближені розв'язки для фільтраційного потоку до колодязів та лінійних дрен при усталеному русі підземних вод.

У 1903 р. Ж. Буссінеск розповсюдив теорію Ж. Дюпюі на неусталений рух підземних_вод. Він отримав диференціальне рівняння фільтрації (яке пізніше назвали його ім`ям) та запропонував його розв'язки для певних конкретних умов.

Досить довгий час динаміка підземних вод розвивалася як галузь теорії фільтрації і мала слабкий зв`язок із геологією.

У 1933 р. професор І. Каменський обґрунтував наявність тісного зв`язку динаміки підземних вод і геології пластів земної кори, що містять у собі воду, та видав капітальну роботу «Основи динамики подземных вод».

Інтенсивний розвиток динаміки підземних вод почався в перші десятиріччя XX ст., що пов`язують із необхідністю вирішення практичних завдань з водопостачання і будівництва, а сучасного класичного вигляду набув у 80-ті роки минулого століття.

Вірогідно, подальший розвиток динаміки підземних вод буде пов`язаний, з одного боку, з вивченням фізико-хімічної природи гідрогеологічних процесів, із другого боку, з підвищенням точності кількісних оцінок (удосконалення методики геофільтраційної схематизації, побудова детерміновано-імовірнісних моделей, використання геоінформаційних технологій тощо).

На жаль, на теперішній час кількість україномовної навчальної літератури з динаміки підземних вод є дуже обмеженою, на відміну від англомовної або виданої переважно за радянських часів російськомовної. Для часткового подолання такого недоліку можна скористатися словником-довідником гідрогеологічних термінів (Українсько-російсько-англійський словник-довідник гідрогеологічних термінів / Д.Ф. Чомко, О.Є. Кошляков, Ф.В. Чомко, І.В. Удалов, Р.Ф. Чомко. – К. : ВПЦ "Київський університет". 2017. – 623 с.).

# ТЕМА 1. ОСНОВИ ДИНАМІКИ ВОДНИХ ПОТОКІВ

## Струменева модель руху рідини

Рух підземних водних розчинів (підземних вод) відбувається крізь пори і тріщини гірських порід. Такий процес має назву *«фільтрація»*. Фільтрація дещо схожа, але суттєво відрізняється від руху рідини як безперервного середовища, наприклад, руху води у річках, каналах або по трубах. Для кількісного опису руху рідини використовують відповідні закони фізики. Щодо фільтрації такі закони повинні враховувати не лише власне рух рідини (рідкої фази), но також взаємодію рідини з гірськими породами (твердою фазою).

Як відомо, загальні закони рівноваги і руху рідини, а також закони взаємодії рідини з твердими тілами розглядаються в розділі фізики, що має назву «*Гідромеханіка*». За визначенням, гідромеханіка - це розділ фізики, в якому розглядаються закони рівноваги та руху рідини, а також закони взаємодії рідини з твердими тілами. Слід підкреслити, що в гідромеханіці рідину розглядають як суцільне безперервне середовище. В свою чергу, в гідромеханіці існує розділ *«Гідродинаміка»*, в якому розглядаються закони руху рідини та взаємодії рідини з твердими тілами. Тому для подальшого кількісного розуміння та опису процесу руху підземних вод необхідно виходити з основних понять і законів гідродинаміки, що розглядаються нижче.

Стан рідини, що не рухається, залежить від положення частинок рідини в просторі та зовнішніх сил, тобто, визначається величиною *гідростатичного тиску*. Якщо рідина знаходиться в русі, то, окрім гідростатичного, слід також враховувати тиск, що виникає при переміщенні частинок рідини.

При русі рідини швидкість та тиск є функціями координат, тобто, змінюються в залежності від зміни положення точки в просторі. Тому доречним є використання понять поля швидкостей та поля тиску. *Поле швидкостей* - це розподіл швидкостей в просторі, що заповнений рідиною, відповідно *поле тиску* - це розподіл тиску в просторі, що заповнений рідиною. Поля швидкостей та тиску можуть бути сталими або змінюватися в часі.

Якщо поля швидкостей та тиску є сталими в часі, рух рідини має назву *усталеного (стаціонарного)*. Якщо ці поля змінюються у часі, рух рідини має назву *неусталеного (нестаціонарного)*.

Векторні лінії поля швидкостей руху рідини мають назву ліній току. *Лінії току* - це такі лінії, у кожній точці яких швидкість у даний момент часу направлена по дотичній до точки.

Також у гідродинаміці використовується поняття траєкторії. *Траєкторія* характеризує переміщення конкретної точки в просторі.

Лінії току та траєкторії співпадають лише при усталеному русі (при стаціонарному полі швидкостей).

Якщо провести траєкторії через точки деякого замкненого контуру, то сукупність цих ліній створить *поверхню течії*. Частка рідини, яка виділена поверхнею течії, має назву *трубки течії* або *струминки*. Якщо замкнений контур, що розглядається, є нескінченно малим, вона має назву *елементарної струминки*.

*Струминка* - це простий кінематичний образ, який покладений в основу струменевої моделі руху рідини. Згідно цієї моделі потік поділяється на елементарні струминки і розглядаються нескінченно малі переміщення об`ємів рідини в струминках та рух цих об`ємів протягом скінченного проміжку часу.

Схема елементарної струминки має такий вигляд (рис.1.1).

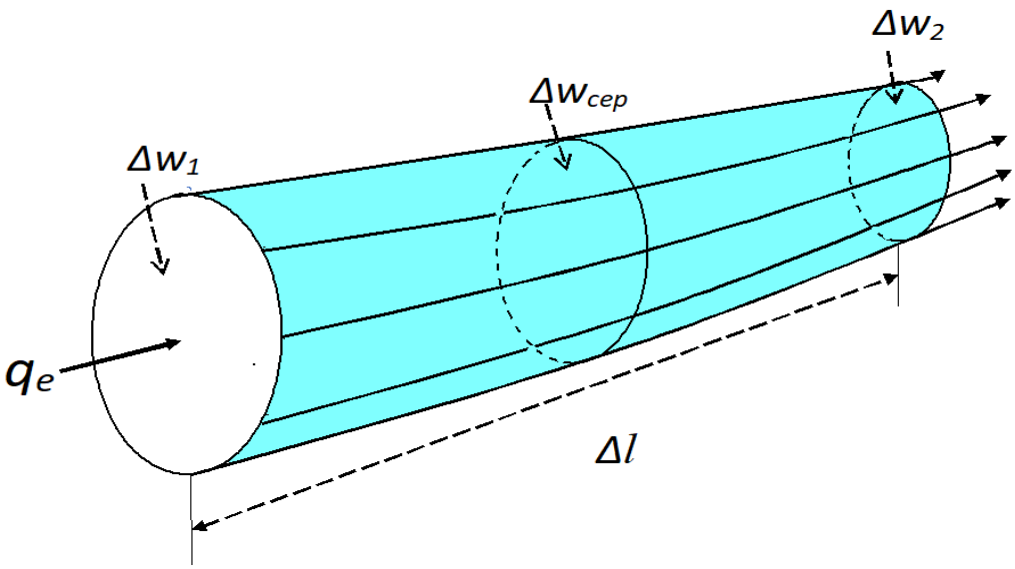


Рис. 1.1 Схема елементарної струминки

Елементарна струминка в цьому випадку характеризується:

1) витратою елементарної струминки $q_e$ ;

2) швидкістю течії елементарної струминки $v_e$ .

*Витрата елементарної струминки* - це кількість рідини, яка протікає через поперечний перетин струминки довжиною $\Delta l$ і площею $\Delta w$ за одиницю часу $\Delta t$:

$$q_e = \frac{\Delta w_{сер} \cdot \Delta l}{\Delta t} \qquad (1.1)$$

де

$$\Delta w_{сер} = \frac{\Delta w_1 + \Delta w_2}{2}. \qquad (1.2)$$

*Швидкість течії елементарної струминки* дорівнює:

$$v_e = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{q_e}{\Delta w_{сер}} \ . \qquad (1.3)$$

Звідси

$$q_e = v_e \, \Delta w_{сер} \ . \qquad (1.4)$$

Якщо розглядати потік рідини як сукупність великої кількості елементарних струминок, то загальна витрата потоку $Q$ буде дорівнювати сумі витрат елементарних струминок:

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} q_{e,i} = \sum_{i=1}^{\infty} v_{e,i} \, \Delta w_{сер,i} \ . \qquad (1.5)$$

У такому разі *середня швидкість потоку* може бути визначена так:

$$v_{сер} = \frac{Q}{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta w_{сер,i}} \ . \qquad (1.6)$$

Якщо позначити $\sum_{i=1}^{\infty} \Delta w_{сер,i} = w$ , то:

$$v_{сер} = \frac{Q}{w} \ . \qquad (1.7)$$

*Середня швидкість* - це фіктивна (уявна), однакова для всіх точок перетину швидкість, при якій має місце така сама витрата потоку, що фактично є в дійсності при дійсних швидкостях, різних в окремих точках перетину потоку.

Як приклад можна розглянути епюри розподілу швидкостей руху рідини в трубі та у вертикальному перетині призматичного русла каналу (рис. 1.2 та 1.3).

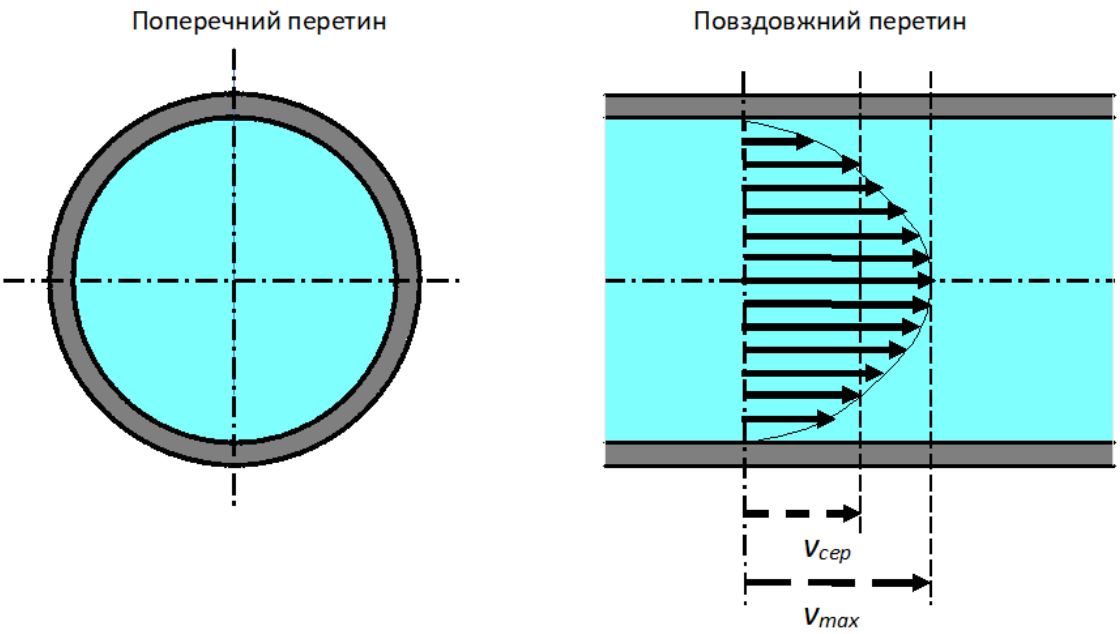


Рис. 1.2 Епюра розподілу швидкостей руху рідини в трубі

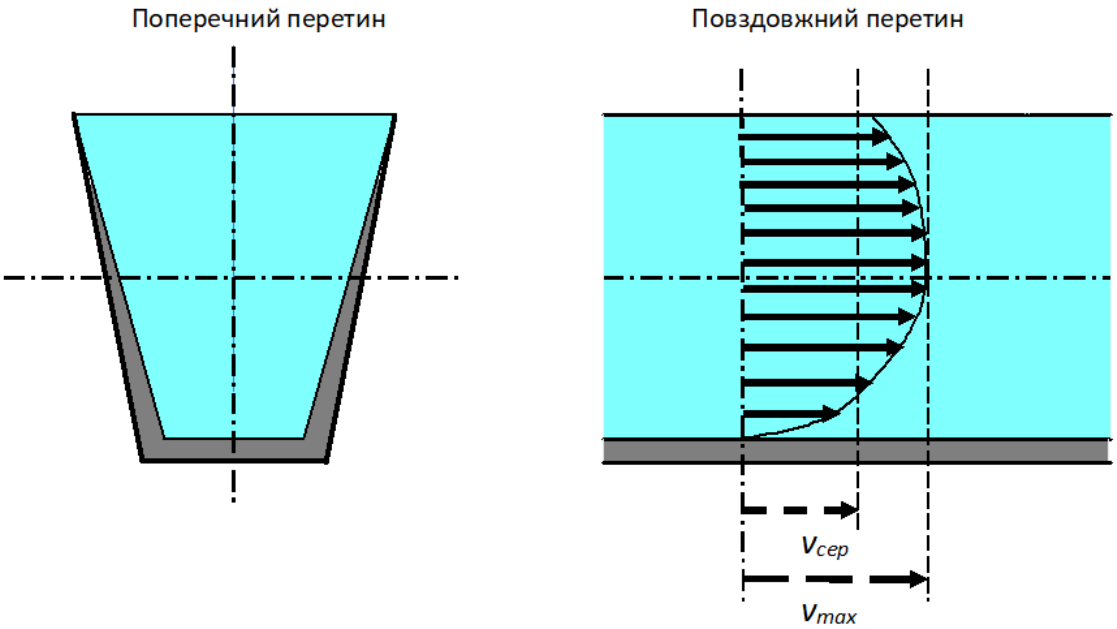


Рис. 1.3 Епюра розподілу швидкостей руху рідини у вертикальному перетині призматичного русла каналу

**Гравітаційний потенціал, гідростатичний та гідродинамічний напори**

Основними силами, які визначають рух водних потоків, є <u>сили тиску</u> та <u>сили гравітації (тяжіння)</u>.

Розглянемо умови рівноваги частки струминки рідини, яка рухається. Частка має довжину $l$ та площу поперечного перетину $w$ (рис. 1.4).

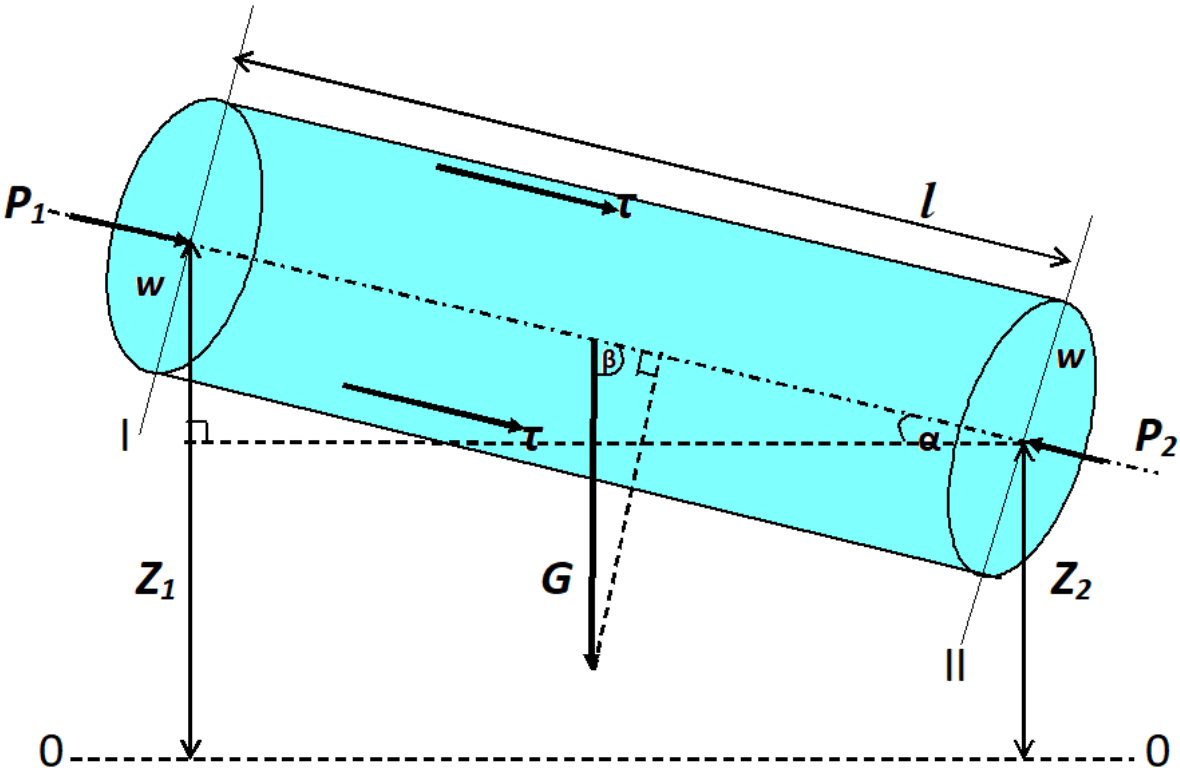


Рис. 1.4 Схема частки струминки рідини, що рухається (площина порівняння 0-0)

На торцях цієї частки струминки діють *сили тиску* $P_1 w$ та $P_2 w$ ($P_1$ і $P_2$ - тиск у перетинах I і II). Сили $P_1 \cdot w$ та $P_2 \cdot w$ направлені вздовж осі струминки.

В об`ємі частки струминки діє *сила гравітації* $G$, яка направлена вертикально.

$$G = \gamma\, w\, l\,, \qquad (1.8)$$

де $\gamma$ - питома вага рідини.

Сили тиску та гравітації спрямовані на переміщення частки струминки рідини (рушійні сили), але має місце протидія з боку *сил опору* $\tau$ (утримуючі сили), які виникають на поверхні струминки при русі рідини.

Рівновага частки струминки рідини має місце, якщо рівні проекції рушійних та утримуючих сил на напрям руху струминки рідини, тобто:

$$P_1\, w - P_2\, w + G\ \cos\beta = \tau\ . \qquad (1.9)$$

Оскільки $\cos\beta = \sin\alpha$, можна записати:

$$P_1\, w - P_2\, w + G\ \sin\alpha = \tau\ , \qquad (1.10)$$

$$\sin\alpha = \frac{Z_1 - Z_2}{l}\ . \qquad (1.11)$$

Виходячи з (1.10), (1.11), (1.8), отримуємо:

$$(P_1 - P_2)\, w + \gamma\, w\, (Z_1 - Z_1) = \tau \ . \qquad (1.12)$$

Якщо застосувати поняття об`єму струминки $V = w \cdot l$, маємо:

$$(P_1 + \gamma\, Z_1) - \ (P_2 + \gamma\, Z_2) = \frac{\tau\, l}{V} \ . \qquad (1.13)$$

Позначимо $\varphi = P + \gamma\, Z$, тоді можна записати:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau\, l}{V} \ . \qquad (1.14)$$

$\tau\, l$ - це робота, яка витрачається на подолання сил опору в частці струминки рідини, що має об`єм $V$.

Тоді величина $\frac{\tau\, l}{V}$ являє собою енергію, яка витрачається на переміщення одиничного об`єму рідини між перетинами I і II, тобто, це *питомі витрати енергії потоку рідини*.

Питомі витрати енергії відповідають різниці потенціалів, тобто, можна стверджувати, що $\varphi = P + \gamma\, Z$ є *потенціал фільтрації*.

Потенціал фільтрації - це сума *потенціалу тиску* $P$ і *гравітаційного потенціалу* $\gamma\, Z$.

Як бачимо, розмірність потенціалу відповідає розмірності тиску.

Існує також поняття *градієнту потенціалу*:

$$I_\varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} = \frac{\tau}{V} \, . \qquad (1.15)$$

За умови, що рідина - це прісна вода, тиск дорівнює атмосферному, та коливання температури незначні, можна стверджувати, що питома вага рідини змінюється дуже мало.

У такому випадку замість потенціалу фільтрації $\varphi$ застосовують поняття *гідростатичного напору* (для рідини в стані спокою) та *гідродинамічного напору* (для рідини, яка рухається).

*Гідростатичний напір* дорівнює:

$$H = \frac{\varphi}{\gamma} = \frac{P}{\gamma} + Z \, . \qquad (1.16)$$

Він характеризує рівень потенціальної енергії в точці, має розмірність довжини (рис.1.5).

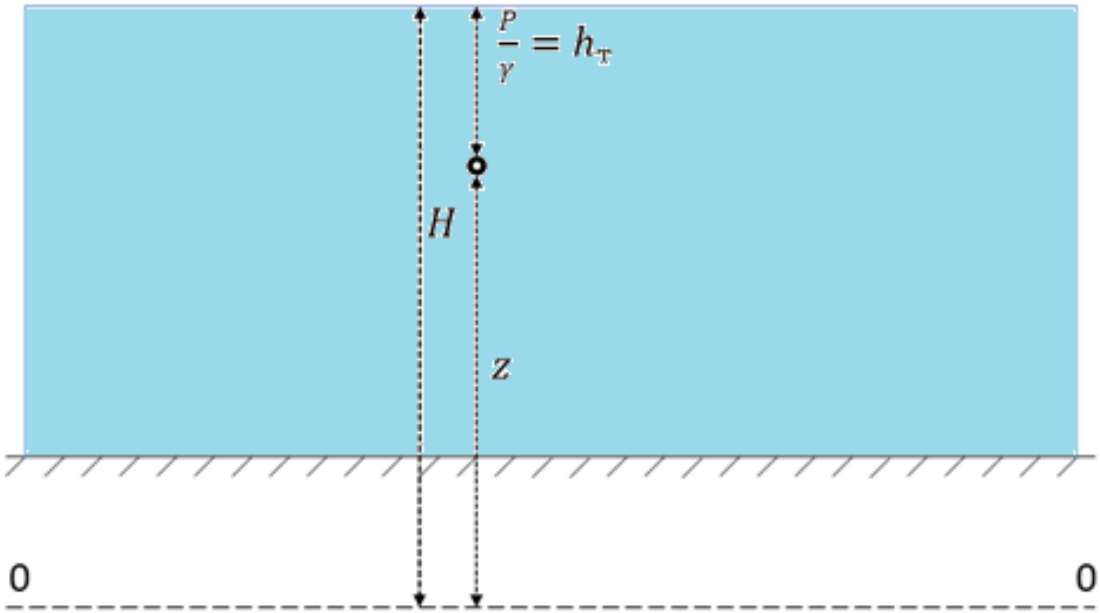


Рис. 1.5 Ілюстрація поняття гідростатичного напору ($\frac{P}{\gamma} = h_{\text{T}}$ - потенціальна енергія тиску, або «висота тиску»; $Z$ - потенціальна енергія положення, або «п'єзометрична висота»)

При русі рідини з`являється кінетична енергія, яка визначається швидкістю руху.

Як відомо, кінетична енергія визначається за формулою $E_k = \frac{m\,v^2}{2}$, де $m$ - маса, $v$ - швидкість.

Масу $m$ можна визначити як

$$m = \rho\, V, \qquad (1.17)$$

де $\rho$ - густина рідини; $V$ - об`єм рідини.

Густина визначається за формулою:

$$\rho = \frac{\gamma}{g}, \qquad (1.18)$$

де $g$ - прискорення сили тяжіння.

Тоді $m = \frac{\gamma\, V}{g}$, а кінетична енергія визначається за виразом:

$$E_k = \frac{\gamma\, V\, v^2}{2\, g}. \qquad (1.19)$$

Для переходу від поняття енергії до поняття потенціалу треба вираз для енергії поділити на об`єм. Тоді вираз для потенціалу кінетичної енергії буде мати вигляд $\frac{\gamma\, v^2}{2\, g}$.

Якщо перейти від потенціалу кінетичної енергії до швидкісного напору $h_v$ (шляхом ділення виразу на $\gamma$), отримаємо вираз:

$$h_v = \frac{v^2}{2\, g}, \qquad (1.20)$$

де $h_v$ - швидкісний напір.

*Гідродинамічний напір* - це сума гідростатичного та швидкісного напорів:

$$H_d = H + h_v = \frac{P}{\gamma} + Z + \frac{v^2}{2\, g}. \qquad (1.21)$$

Уявлення про гідростатичний та гідродинамічний напори можна отримати, якщо ввести в потік рідини дві трубки, які відкриті з обох кінців, причому одна трубка пряма, а друга - зігнута (трубка Піто, рис. 1.6).

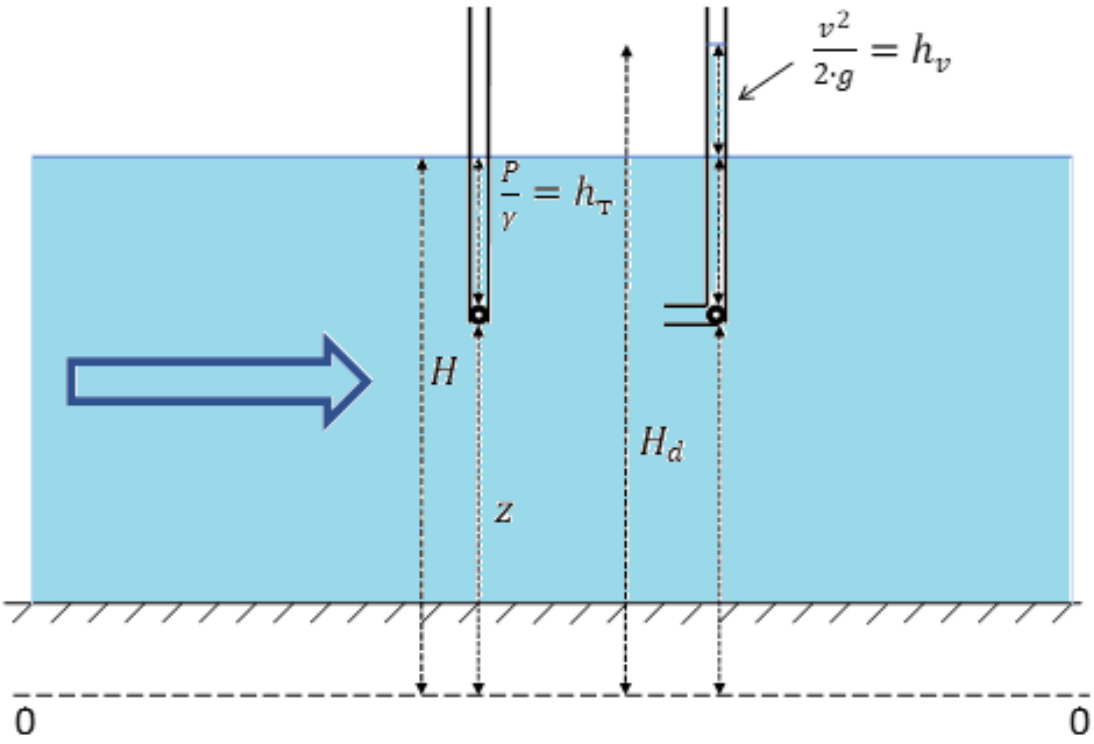


Рис. 1.6 Уявлення про гідростатичний та гідродинамічний напори

Існує поняття *градієнта гідродинамічного напору (напірного градієнта, гідравлічного нахилу)*:

$$I = \frac{H_{d1} - H_{d2}}{l}, \qquad (1.21)$$

де $H_{d1}$ - гідродинамічний напір у перетині 1; $H_{d2}$ - гідродинамічний напір у перетині 2; $l$ – відстань між перетинами.

З виразу ясно, що напірний градієнт є величиною, що вимірюється в долях одиниці.

## Рівняння Бернуллі для ідеальної рідини

*Ідеальна рідина (нев`язка рідина)* - це нестисла рідина, в`язкість якої дорівнює нулю. Тому при русі такої рідини не виникає тертя.

Як відомо, сумарна енергія потоку рідини характеризується величиною гідродинамічного напору (див. залежність 1.21). При русі ідеальної рідини немає витрат енергії, тому що при русі не виникає тертя. Тобто, для потоку ідеальної рідини гідродинамічний напір є сталою величиною:

$$H_d = \frac{P}{\gamma} + Z + \frac{v^2}{2\,g} = const\ . \qquad (1.22)$$

Ця залежність 1.22 і є рівнянням Бернуллі для ідеальної рідини.

Окремі члени рівняння Бернуллі являють собою *питому енергію*, тобто, енергію, яка віднесена до одиниці маси рідини. При цьому, питома енергія обчислюється відносно довільно встановленої горизонтальної площини порівняння:

$Z$ - питома енергія розташування;

$\frac{P}{\gamma} = h_{\text{т}}$ - питома енергія тиску;

$\frac{P}{\gamma} + Z$ - питома потенціальна енергія;

$\frac{v^2}{2\,g} = h_v$ - питома кінетична енергія;

$H_d$ - питома сумарна потенціальна і кінетична енергія.

Таким чином, енергетичний сенс рівняння Бернуллі для ідеальної рідини полягає в тому, що *сумарна питома енергія потоку рідини є сталою величиною*.

## Рівняння Бернуллі для реальної рідини

Будь-яка існуюча в природі рідина має в`язкість.

Рідина, що має в`язкість, має назву *реальної рідини*. Тому при русі реальної рідини виникає внутрішнє тертя, тобто, опір рухові рідини. Чим більша швидкість руху, тим більший опір. Можна казати, що при русі реальної рідини долається дія сил опору.

Тому, якщо записати рівняння Бернуллі для двох точок струминки реальної рідини, воно буде мати такий вигляд:

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{{v_1}^2}{2\,g} = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{{v_2}^2}{2\,g} + \Delta H_{\text{тер}}\ , \qquad (1.23)$$

де $\Delta H_{\text{тер}}$ - втрата гідродинамічного напору на подолання сили тертя при русі струминки реальної рідини (втрата гідродинамічного напору на тертя).

Залежність 1.23 є рівнянням Бернуллі для реальної рідини.

Енергетичний зміст рівняння Бернуллі для реальної рідини полягає в тому, що *сумарна питома енергія потоку не є сталою величиною*. Ця енергія витрачається на подолання сил опору (тертя) на шляху потоку (переходить в інший вид енергії - теплову енергію).

## Режими руху рідини

Сили опору (тертя), що виникають при русі рідини, залежать від швидкості руху (при збільшенні швидкості опір зростає). Якщо дослідити фізичну природу сил опору в потоці рідини, можна виділити різні режими руху.

*Ламінарний (струменевий) режим*. Опір рухові потоку визначається тільки силами в`язкого тертя між окремими струминками потоку. Сили опору рухові, які виникають у такому потоці, є поверхневими, тому визначаються дотичним напруженням. *Дотичне напруження* - це сила опору, яка прикладена до одиниці поверхні потоку. Основні закономірності в`язкого тертя були встановлені Ньютоном у 1686 р. Для ламінарного режиму характерним є рух рідини окремими струминками, між якими відсутнє перемішування.

*Турбулентний (безладний) режим*. При такому режимі опір рухові рідини визначається пульсацією тиску і турбулентним перемішуванням.

У турбулентному потоці залежність витрат енергії (сил опору) від швидкості потоку має квадратичний характер. Для турбулентного режиму є характерним перемішування між окремими струминками.

*Змішаний режим.* При зростанні швидкості потоку ламінарний режим не миттєво переходить у турбулентний. Існує перехідна область потоку, де можливе існування обох видів режиму - ламінарного і турбулентного. Такий режим руху рідини має назву змішаного.

Виділяють також *в`язкопластичний режим*. Він має місце при течії рідини в тонких плівках. Тут має місце зчеплення окремих частинок рідини між собою, а не тільки внутрішній опір у потоці. Рідина буде в такому випадку рухатися лише тоді, коли зсувне напруження буде перевищувати початкове напруження зсуву (перевищує силу зчеплення окремих частинок рідини між собою).

Уперше існування двох режимів течії (ламінарного і турбулентного) було встановлене Рейнольдсом у 1883 р. Рейнольдс запропонував характеристичну залежність (*число Рейнольдса* $R_e$), величина якої визначає режим руху рідини.

Так, для круглого перетину (труби):

$$R_e = \frac{v\,d}{\upsilon}, \qquad (1.23)$$

де $v$ - швидкість течії рідини; $d$ - діаметр труби; $\upsilon$ - коефіцієнт кінематичної в`язкості рідини.

Для відкритих русел:

$$R_e = \frac{v\,R}{\upsilon}, \qquad (1.24)$$

де $R$ - гідравлічний радіус (відношення площі поперечного перетину потоку до змочуваного периметра потоку).

При деякій величині $R_e$ , що має назву *критичного числа Рейнольдса* $R_{e\text{кр}}$, порушується ламінарний режим. Величина $R_{e\text{кр}}$ встановлюється дослідним шляхом. Наприклад, для гладких труб $R_{e\text{кр}} \approx 2300$, для відкритих русел $R_{e\text{кр}} = 300 \cdots 1000$.

**Контрольні запитання**

1. Які поняття гідромеханіки використовуються при розгляді струменевої моделі руху рідини?
2. Що лежить в основі понять «суцільне середовище» та «гідростатичний тиск»?
3. Що таке «поле швидкостей» та «поле тисків»?
4. Що означають поняття – «лінія течії», «поверхня течії», «траєкторія»?
5. Що таке «струминка» та «трубка течії»?
6. Як визначається витрата та швидкість елементарної трубки течії (струминки)?

7. Що таке середня швидкість потоку підземних вод?
8. Як визначається загальна витрата потоку?
9. Які види руху рідини розглядаються в динаміці підземних вод?
10. Що таке рівномірний рух» рідини?
11. Що таке нерівномірний рух рідини?
12. Наведіть схему сил, що діють на струминку рідини під час її руху.
13. Яке рівняння відображує рівновагу сил, що діють у напрямі руху струминки рідини?
14. Як визначається потенціал фільтрації?
15. Як визначається градієнт потенціалу фільтрації?
16. Як визначається висота тиску (п’єзометрична висота)?
17. Що таке гідростатичний напір?
18. Що таке швидкісний напір?
19. Що таке гідродинамічний напір?
20. Що означає поняття ідеальна рідина?
21. Який вигляд має рівняння Бернуллі для ідеальної рідини?
22. Який вигляд має рівняння Бернуллі для реальної рідини?
23. Що таке ламінарний режим руху рідини?
24. Що таке турбулентний режим руху рідини?
25. Для чого використовується число Рейнольдса?
26. Яку розмірність має числа Рейнольдса?

## ТЕМА 2. ЗАКОНИ ФІЛЬТРАЦІЇ

Пористе середовище зазвичай вміщує в собі воду. Відомо декілька класифікацій за видами та категоріями води в гірських породах.

У класичній динаміці підземних вод розглядається процес руху води при повному насиченні порід водою. Такий процес називають *фільтрацією*, а вода має назву *вільної* або *гравітаційної*. Процес фільтрації обумовлюється, головним чином, силами гравітації. Тому він підпорядковується законам гідродинаміки, які розглядалися в темі 1. Інакше кажучи, процес фільтрації відбувається під дією потенціалу фільтрації (або гідродинамічного напору) та описується рівнянням Бернуллі для реальної рідини.

Проте процес фільтрації суттєво відрізняється від суцільного руху водних потоків. Фільтрація здійснюється по порах і тріщинах складної форми, що мають невеликі розміри та хаотично розміщені в товщі гірських порід.

Пропонувалося декілька гіпотез відносно моделі фільтрації. Зокрема, Сліхтер розробив теорію фільтрації через фіктивний ґрунт, який складається з кулеподібних часток, а Козені запропонував модель фільтрації у вигляді пучка трубок, різних за діаметром. Але ці розробки не відповідали реальним природним умовам, тому не були застосовані на практиці.

Реальний результат отримав Дюпюі, який застосував поняття «швидкість фільтрації» як важливу кінематичну характеристику потоку. *Швидкість фільтрації за Дюпюі* $v$ - це відношення витрати потоку $Q$ до повної площі (площа пор і тріщин плюс площа частинок породи) його поперечного перетину $F$ :

$$v = \frac{Q}{F}. \qquad (2.1)$$

У дійсності фільтрація здійснюється не через повну площу поперечного перетину, а тільки в межах тієї частки всіх пор і тріщин, в якій може відбуватися рух гравітаційної води (у межах так званої активної пористості).

Тому *дійсна швидкість руху* води в гірських породах $v_d$ визначається залежністю:

$$v_d = \frac{Q}{n_a F}, \qquad (2.2)$$

де $n_a$ - активна пористість (завжди менша за одиницю).

Тоді:

$$v = v_d\, n_a \qquad (2.3)$$

або

$$v_d = \frac{v}{n_a}. \qquad (2.4)$$

Звідси можна зробити висновок, що дійсна швидкість руху води в гірській породі завжди перевищує швидкість фільтрації, тому що активна пористість менша за одиницю.

Застосування поняття швидкості фільтрації має дві переваги:

1. Дозволяє усунути труднощі, які виникають при розгляді хаотичного руху води в поровому просторі.

2. Дозволяє застосувати уявлення механіки суцільного середовища при аналізі фільтрації.

## Основний закон фільтрації

Закони фільтрації встановлюють зв`язок швидкості фільтрації або витрат фільтраційного потоку з втратами напору (втрати напору відповідають витратам енергії потоку).

Вперше такий зв`язок був експериментально встановлений французьким гідромеханіком Дарсі в 1856 році. Дарсі досліджував рух води в трубках, які були заповнені піском (рис. 2.1).

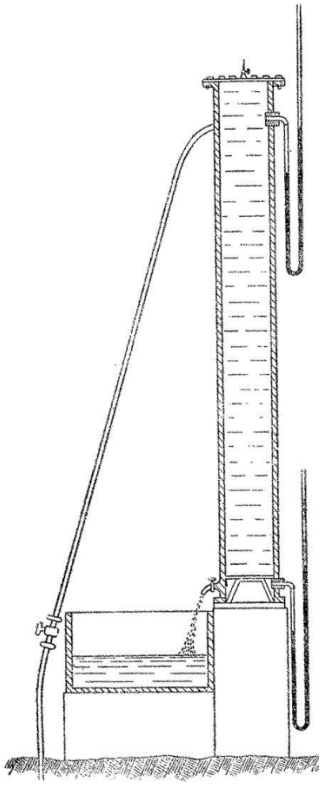

Рис.2.1 Прилад Дарсі *(Каменский Г.Н., 1933)*

Обробивши результати дослідів на цьому приладі, Дарсі сформулював закон, що пізніше отримав назву *лінійного закону фільтрації* або *закону Дарсі*:

$$Q = K\,F\,I\,, \qquad (2.5)$$

$$I = \frac{\Delta H}{\Delta l}, \qquad (2.6)$$

де $Q$ - витрати фільтраційного потоку з поперечним перетином площею $F$ при напірному градієнті $I$; $K$ - коефіцієнт пропорційності; $\Delta H$ - зміна гідродинамічного напору на відстані $\Delta l$.

Такий вид запису закону Дарсі має назву «витратного». Якщо згадати формулу швидкості фільтрації за Дюпюі (формула 2.1), то можна записати закон Дарсі у так званій «швидкісній» формі:

$$v = K\,I\,. \qquad (2.7)$$

З`ясуємо, чому дорівнює величина гідродинамічного напору. Згідно з рівнянням Бернуллі для реальної рідини (залежність 1.23):

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{{v_1}^2}{2 \cdot g} = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{{v_2}^2}{2\,g} + \Delta H_{\text{тер}}. \qquad (2.8)$$

Швидкість фільтраційного потоку дуже мала, тому що сили опору руху води дуже значні. Тоді величина швидкісного напору $\frac{v^2}{2\,g}$ буде близька до нуля, а рівняння Бернуллі буде мати вигляд:

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \Delta H_{\text{тер}}. \qquad (2.9)$$

Величина $H = \frac{P}{\gamma} + Z$ має назву гідростатичного напору. Оскільки $\frac{v^2}{2\,g} \approx 0$, має місце збіг п`єзометричної та напірної поверхонь фільтраційного потоку. Збігаються також величини напірного градієнта та п`єзометричного нахилу, тому вони розглядаються для фільтраційних потоків як ідентичні, які відповідають п`єзометричному нахилу в законі Дарсі.

Закон Дарсі має назву лінійного, тому що швидкість фільтрації (або витрата потоку) прямо пропорційна напірному градієнту потоку.

Закон Дарсі має назву основного, оскільки він справедливий для переважної більшості природних фільтраційних потоків.

## Коефіцієнти фільтрації та проникності

Коефіцієнт пропорційності $K$ в законі Дарсі отримав назву *коефіцієнта фільтрації*. Якщо розглянути закон Дарсі, можна стверджувати, що $K$ має розмірність швидкості (при гідрогеологічних розрахунках швидкість вимірюють переважно в м/доб). Коефіцієнт фільтрації в числовому виразі можна визначити як швидкість фільтрації при напірному градієнті, що дорівнює одиниці.

Коефіцієнт фільтрації залежить від властивостей гірської породи (геометрії порового простору) та від гідродинамічних властивостей рідини, що фільтрується (густини та в`язкості). Тому при дослідженнях фільтрації рідини, склад якої змінюється (з урахуванням зміни густини та в`язкості рідини у зв`язку зі зміною мінералізації і температури), більш зручною є інша форма запису закону Дарсі, яка безпосередньо враховує вплив гідродинамічних властивостей рідини:

$$v = K_{\text{п}} \frac{\gamma}{\eta} I = K_{\text{п}} \frac{\rho g}{\eta} I , \qquad (2.10)$$

де $\gamma = \rho \cdot g$ - питома вага рідини; $\rho$ - густина рідини; $g$ - прискорення сили тяжіння; $\eta$ - коефіцієнт динамічної в`язкості рідини; $K_{\text{п}}$ - *коефіцієнт проникності*.

Коефіцієнт проникності являє собою більш точну характеристику порового середовища, тому що не залежить від гідродинамічних властивостей рідини, що фільтрується. Він залежить лише від геометрії порового простору.

Між $K$ та $K_{\text{п}}$ існує такий зв`язок:

$$K = K_{\text{п}} \frac{\rho g}{\eta} , \qquad (2.11)$$

$$K_{\text{п}} = \frac{\eta}{\rho g} . \qquad (2.12)$$

Коефіцієнт проникності має розмірність площі. У фізичній системі одиниць $K_{\text{п}}$ вимірюється в см$^2$, у системі СІ - в м$^2$. Але в цих системах значення $K_{\text{п}}$ для гірських порід дуже малі. Тому на практиці $K_{\text{п}}$ вимірюється позасистемною одиницею, яка має назву дарсі (*D*), 1*D* = 1.02x10$^{-8}$ см$^2$.

Важливо, що для прісної води при $t$ = +20$^0$С коефіцієнт проникності (у *D*) в числовому відношенні майже співпадає з коефіцієнтом фільтрації (у м/доб).

## Закон турбулентної фільтрації

У великих пустотах та тріщинах гірських порід рух води може відповідати рухові водних потоків у відкритих руслах, тобто може мати місце турбулентний рух води. У 1912 році О. Краснопольський експериментально встановив закон турбулентної фільтрації. Пізніше цей закон отримав назву *закону Краснопольського*:

$$Q = K_{\text{к}}\, F\, \sqrt{I}\ , \qquad (2.13)$$

$$v = K_{\text{к}}\, \sqrt{I}\ , \qquad (2.14)$$

де $K_{\text{к}}$ - коефіцієнт фільтрації за Краснопольським. Практично він співпадає з коєфіцієнтом фільтрації за Дарсі.

Закон Краснопольського відповідає відомому в гідрології закону турбулентної течії відкритих водних потоків (*закону Шезі*):

$$v = C\, \sqrt{R}\, \sqrt{I}\ , \qquad (2.15)$$

де $C$ - коефіцієнт Шезі; $R$ - гідравлічний радіус водного потоку (відношення площі поперечного перерізу до змоченого периметра).

Закони Краснопольського і Шезі співпадають при $K_{\text{к}} = C\, \sqrt{R}$. Тому іноді закон Краснопольського називають законом Шезі-Краснопольського (або Краснопольського-Шезі).

Згідно із законом Краснопольського напірний градієнт залежить від квадрата швидкості фільтрації, тому закон Краснопольського ще має назву квадратичного або нелінійного.

Після встановлення квадратичного закону фільтрації деякий час вважали, що для грубоуламкових та тріщинуватих порід фільтрація відповідає саме цьому закону. Але практичні роботи цього не підтвердили. Причина полягає в тому, що в реальних умовах крупні пустоти і тріщини пересікаються з дрібними, яких значно більше. Це викликає повільну фільтрацію в переважній більшості природних умов, тобто для цих умов справедливий закон ламінарного руху (закон Дарсі).

## Змішана фільтрація

У водоносних пластах іноді мають місце фільтраційні течії, які не можна описати ані законом Дарсі, ані законом Краснопольського. Для таких течій справедливими є залежності, що займають деяке проміжне положення.

Причиною цього є не наявність якісно іншого режиму фільтрації, а одночасне існування у різних зонах пласта двох режимів фільтрації (ламінарного і турбулентного). Така фільтрація має назву змішаної.

Зона турбулентної фільтрації може виникнути, наприклад, поблизу діючих водозабірних свердловин (за рахунок великих напірних градієнтів і, як наслідок, швидкостей руху води).

Для умов змішаної фільтрації Смрекер запропонував таку залежність:

$$v = K\sqrt[m]{I}\,, \qquad (2.16)$$

де $1 \leq m \leq 2$.

Слід звернути увагу, що для ламінарної фільтрації $m$ = 1, а для турбулентної $m$ = 2.

Проте *формула Смрекера* не є вдалою формою запису, тому що $m$, у свою чергу, залежить від швидкості фільтрації $v$.

Тому для змішаної фільтрації є доцільним застосування відомої з гідродинаміки *формули Проні*, яка базується на принципі незалежності дії в`язкого тертя та інерційно-пульсаційних сил:

$$I = a\,v + b\,v^2\,, \qquad (2.17)$$

де $a$ та $b$ - параметри, що залежать від фільтраційних властивостей гірської породи та в`язкості рідини.

Для ламінарного руху: $I = a\,v$, $v = \frac{I}{a}$. Тоді $\frac{1}{a} = K$, де $K$ - коефіцієнт фільтрації за Дарсі.

Для турбулентного руху: $I = b\,v^2$, $v^2 = \frac{I}{b}$, $v = \frac{\sqrt{I}}{\sqrt{b}}$ . Тоді $\frac{1}{\sqrt{b}} = K_{\text{к}}$, де $K_{\text{к}}$ - коефіцієнт фільтрації за Краснопольським.

Формула Проні іноді подається у такому вигляді:

$$I = \frac{v}{k}\,(1 + \chi\,v)\,, \qquad (2.18)$$

де $K$ - коефіцієнт фільтрації за Дарсі; $\chi$ - коефіцієнт нелінійності (коефіцієнт турбулентності).

Коефіцієнт нелінійності виражає співвідношення між силами інерції і силами тертя в пористому середовищі та враховує структуру пористого середовища.

При малих швидкостях фільтрації $\chi\,v$ є дуже малою величиною порівняно з одиницею, тому формула Проні відповідає формулі закону Дарсі.

Якщо швидкість фільтрації дуже велика, $\chi\, v \gg 1$, а формула Проні відповідає формулі закону Краснопольського.

Коефіцієнт нелінійності визначають за допомогою емпіричних залежностей. Найбільш точною вважається залежність М. Бєссонова.

## Верхня межа застосовності закону Дарсі

Експериментально доведено, що як при великих, так і при дуже малих швидкостях фільтрації мають місце відхилення від закону Дарсі. Відповідно розрізняють верхню та нижню межі застосовності закону Дарсі.

Верхня межа обумовлена проявом інерційних та пульсаційних сил при фільтрації в породах із високою водопроникністю при великих швидкостях фільтрації. Критерієм порушення закону Дарсі (тобто ламінарності течії) є деяке (критичне) значення *числа Рейнольдса* $Re_{\text{кр}}$. Але формули для розрахунку числа Рейнольдса $Re$, які отримані для суцільних водних потоків (див. тему 1), не можна застосовувати для руху води в гірських породах (для умов фільтрації). Тому були запропоновані емпіричні формули для розрахунку числа Рейнольдса для умов фільтрації в зернистих породах, у зцементованих та тріщинуватих породах та для неоднорідного фільтраційного середовища.

Для умов фільтрації в зернистих породах М. Павловський запропонував таку формулу для розрахунку числа Рейнольдса:

$$Re = \frac{1}{0.75\, n_a + 0.23}\, \frac{v\, d_e}{\eta}, \qquad (2.19)$$

де $v$ - швидкість фільтрації, см/с; $d_e$- діючий діаметр зерен породи, см; $n_a$ - коефіцієнт активної пористості породи; $\eta$ - коефіцієнт динамічної в`язкості рідини, що фільтрується, см$^2$/с.

Для умов фільтрації в зцементованих та тріщинуватих породах запропонована формула В. Щелкачова:

$$Re = \frac{10\, v \sqrt{K_{\text{П}}}}{n_a^{2,3}\, \eta}, \qquad (2.20)$$

де $K_{\text{П}}$ - коефіцієнт проникності, см$^2$.

Для умов неоднорідного фільтраційного середовища запропонована формула Ф. Котяхова:

$$Re = \frac{4\, v \sqrt{2\, K_{\text{П}}}}{\eta\, n_a^{1.5}}. \qquad (2.21)$$

Критичне значення числа Рейнольдса $Re_{\text{кр}}$ за М. Павловським, дорівнює 7...9,5. Якщо $Re < Re_{\text{кр}}$, режим фільтрації вважають ламінарним, в іншому випадку – турбулентним.

Наведені нижче дані свідчать, що в реальних природних умовах головним чином має місце ламінарний режим фільтрації.

Так, М. Гіринським експериментально встановлено, що в зернистих породах закон Дарсі завжди справедливий, якщо коефіцієнт фільтрації не перевищує 50 м/доб. При коефіцієнті фільтрації від 50 до 125 м/добу при відкачуваннях із свердловин мають місце відхилення від закону Дарсі лише в незначних за розмірами локальних зонах.

За даними Г. Каменського, І. Скабаллановича та ін., у галечникових, сильно тріщинуватих і закарстованих породах при відкачуваннях із свердловин розміри зони відхилень від закону Дарсі є незначними порівняно з розмірами воронки депресії, якщо коефіцієнт фільтрації породи не перевищує 1000 м/доб.

Слід також відмітити, що в реальних природних умовах напірні градієнти в 100...200 разів менші за одиницю, тому максимальні швидкості фільтрації складають одиниці м/доб. Звідси можна зробити висновок про те, що порушення закону Дарсі має місце лише в зонах дуже значної деформації фільтраційного потоку, наприклад, при великих зниженнях напору у свердловинах у результаті відкачувань. У таких випадках слід застосовувати формули, які відповідають змішаному режиму фільтрації, а існування турбулентного режиму за даними В. Шестакова) взагалі нереальне.

## Нижня межа застосовності закону Дарсі

Закон Дарсі порушується і при малих швидкостях фільтрації. Це пов`язують з уявленнями про в`язкопластичну течію рідини (див. тему 1), а саме, з тим, що рух рідини має місце тоді, коли зсувне напруження перевищує початкове напруження зсуву (деякий початковий градієнт).

Питання про нижню межу застосовності закону Дарсі доцільно розглядати з позицій руху вологи в ненасичених водою гірських породах (див. тему 16). При цьому нижня межа дії закону Дарсі взагалі не встановлюється.

## Контрольні запитання

1. Що таке «процес фільтрації»?
2. Що являє собою процес фільтрації з точки зору гідродинаміки?
3. Що таке швидкість фільтрації за Дюпюі?

4. Що таке дійсна швидкість фільтрації?
5. Що таке активна пористість?
6. Як співвідносяться швидкість фільтрації та дійсна швидкість фільтрації?
7. Яка залежність встановлена законом Дарсі?
8. Який вигляд має закон Дарсі у швидкісній формі?
9. Що характеризує коефіцієнт фільтрації (коефіцієнт пропорційності в законі Дарсі)?
10. Що таке градієнт напору та яка його розмірність?
11. Яку розмірність має коефіцієнт фільтрації?
12. В яких випадках у динаміці підземних вод використовується поняття коефіцієнта проникності?
13. Яке співвідношення між коефіцієнтом фільтрації та коефіцієнтом проникності?
14. В яких одиницях вимірюється коефіцієнт проникності?
15. Для яких гірських порід отриманий закон турбулентної фільтрації (закон Красно польського)?
16. Який вигляд має закон Краснопольського у витратній та швидкісній формі?
17. Як визначається швидкість турбулентного режиму руху водних потоків у відповідності до закону Шезі?
18. При якій умові вирази законів Краснопольського та Шезі співпадають?
19. Що таке змішана фільтрація?
20. Для яких ділянок потоку може бути характерною змішана фільтрація?
21. Для яких гірських порід може бути характерною змішана фільтрація?
22. Якими залежностями описується змішана фільтрація?
23. Чому для опису змішаної фільтрації краще підходить формула Проні?
24. Що являють собою коефіцієнти в формулі Проні?
25. Чи існують обмеження застосуванню закону Дарсі?
26. Чим обумовлена верхня межа застосування закону Дарсі?
27. Як розраховується число Рейнольдса для процесів фільтрації підземних вод?
28. Чим обумовлена нижня межа застосування закону Дарсі?

## ТЕМА 3. ГРАВІТАЦІЙНА ТА ПРУЖНА ЄМНІСТЬ ГІРСЬКИХ ПОРІД

Коли в гідрогеології говорять про водонасиченість водоносних шарів, то мають на увазі не загальний об`єм води в порах та тріщинах гірських порід, а лише ту частку цього об`єму, яка може бути отримана з породи будь-якою водозабірною спорудою. Таку здатність гірських порід віддавати воду пов`язують з ємнісними властивостями гірських порід.

У природних умовах віддача води породою, яка повністю насичена, може здійснюватися двома шляхами:

1) шляхом вільного стікання, яке обумовлене дією гравітаційних сил;

2) шляхом вичавлювання, яке обумовлене дією додаткового навантаження на породу.

У першому випадку говорять про *гравітаційну ємність*, у другому - про *пружну ємність* (припускаючи, що процеси стиснення мають пружний характер).

За допомогою ємнісних властивостей гірських порід також характеризуються процеси, коли порода приймає в себе деякий об`єм води.

### Гравітаційна ємність гірських порід

Розглянемо такий дослід. Маємо трубку, яка заповнена піском, причому довжина трубки значно перевищує висоту капілярного підняття в пісках (рис.3.1).

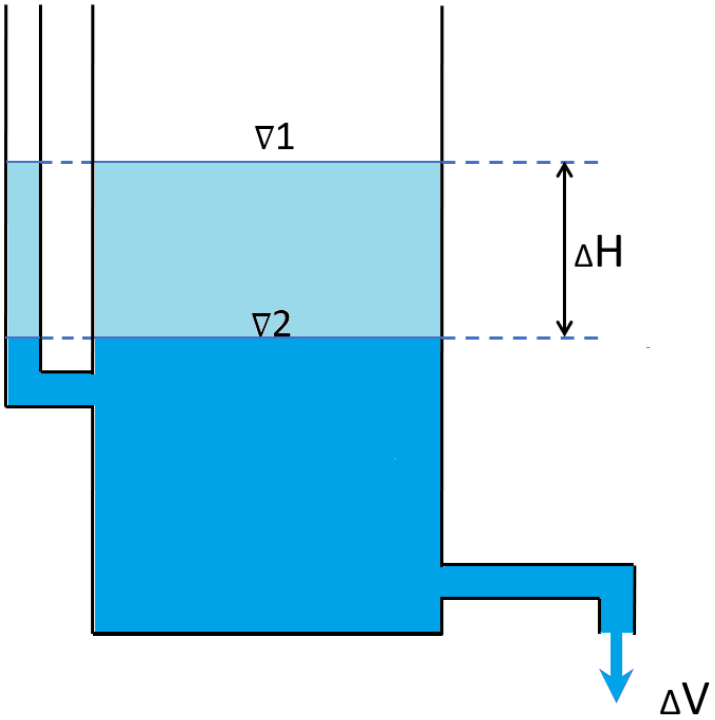


Рис.3.1 До визначення гравітаційної ємності гірської породи

Заповнимо трубку водою до позначки 1 (рис.3.1). За допомогою крану, розташованого знизу, будемо зливати деякий об`єм води $\Delta V$, відмічаючи зниження рівня води, поки не досягнемо позначки 2.

Для однорідного ущільненого піску відношення

$$\mu = \frac{\Delta V}{F\ \Delta H} \qquad (3.1)$$

буде приблизно сталим (тут $F$ - площа поперечного перерізу трубки, $\Delta H$ - зміна рівня, або гідродинамічного напору в трубці).

Отже, це відношення характеризує відносний об`єм води, який віддає пісок з одиниці площі трубки.

Дослід, який розглянуто, досить добре віддзеркалює процес віддачі води гірською породою при зниженні вільного рівня (депресійної поверхні) безнапірного водоносного горизонту. Величина $\mu$ є відношенням об`єму води, яка вільно витекла з породи, до «осушеного» об`єму породи і має назву *коефіцієнта гравітаційної ємності (або коефіцієнта гравітаційної водовіддачі)*. Слід зазначити, що поняття «осушений» використане умовно (частка води, наприклад капілярної, залишається в породі). Коефіцієнт гравітаційної водовіддачі можна визначити також як кількість води, яка вивільнюється з елементарного об`єму водоносного пласта при його осушенні. Зрозуміло, що $\mu$ вимірюється в долях одиниці.

Іноді коефіцієнт гравітаційної водовіддачі визначають як різницю між загальною пористістю $n$ та максимальною молекулярною вологоємністю $W_{\text{в}}$ з урахуванням об`ємних мас скелета породи ($\Delta_{\text{ск}}$) і води ($\Delta_{\text{в}}$):

$$\mu = n - \frac{\Delta_{\text{ск}}\, W_{\text{в}}}{\Delta_{\text{в}}}\,. \qquad (3.2)$$

Часто-густо приймають, що величина $\mu$ дорівнює активній пористості породи $n_{\text{а}}$.

Для різних гірських порід характерні приблизно такі значення $\mu$:

гравій та крупнозернистий пісок - 0,25...0,30;

середньо- та дрібнозернистий пісок - 0,15...0,20;

супіски - 0,05...0,10;

суглинки - < 0,01.

Аналогом коефіцієнта гравітаційної водовіддачі при підйомі вільної поверхні підземних вод і заповненні пор породи водою є коефіцієнт нестачі насичення.

Практично визначена величина коефіцієнта нестачі насичення зазвичай є трохи меншою, ніж величина коефіцієнта гравітаційної водовіддачі для тієї самої гірської породи. Це обумовлене, головним чином, збереженням у породі, яка насичується, так званого «затиснутого повітря».

**Пружна ємність гірських порід**

Розглянемо такий приклад. У відносно водотривких глинах знаходиться водонасичена лінза піску. Якщо цю лінзу розкрити свердловиною (рис.3.2), то можна зафіксувати надмірний напір (рівень води у свердловині встановлюється вище, ніж верхня межа лінзи).

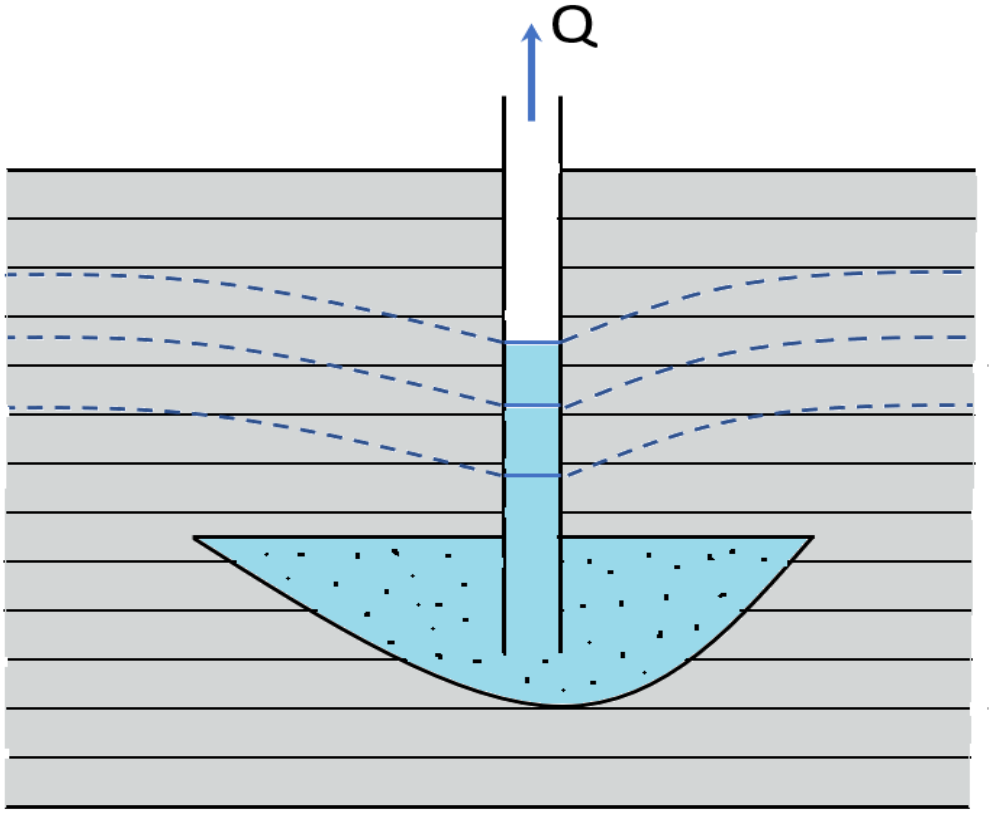


Рис.3.2 До поняття пружної ємності гірських порід

При відкачуванні води з лінзи рівень води у свердловині буде поступово знижуватися, але ще довгий час буде перевищувати верхню межу лінзи. Пісок при цьому буде повністю водонасиченим, тобто, гравітаційна ємність себе не проявляє. Крім того, приплив води збоку до лінзи майже неможливий. Виникає питання - звідки береться вода з піску при відкачуванні?

У даному випадку ми маємо справу з напірною фільтрацією. З прикладу (рис.3.2) видно, що осушення породи немає. Тоді ємнісні властивості можуть визначатися лише пружністю гірських порід, що насичені рідиною, та власною

пружністю рідини. Іноді при оцінці пружної водовіддачі пропонують враховувати також пружні властивості гірських порід, що перекривають водонасичений шар.

За пропозицією В. Щелкачова, пружні властивості водонасиченої породи характеризуються *коефіцієнтом пружної ємності гірської породи* $\beta^*$:

$$\beta^* = n\,\beta_{\text{в}} + \beta_{\text{п}}\,, \qquad (3.3)$$

де $\beta_{\text{в}}$ - коефіцієнт пружного стиснення води; $\beta_{\text{п}}$ - коефіцієнт пружного стиснення гірської породи.

Відповідно, $\beta^*$вимірюється в м$^{-1}$.

Для характеристики ємнісних властивостей напірного водонасиченого шару гірської породи Ф. Бочевер запропонував поняття *коефіцієнта пружної водовіддачі водонасиченого шару* $\mu^*$, за аналогією з коефіцієнтом гравітаційної водовіддачі гірської породи $\mu$:

$$\mu^* = \Delta_{\text{в}}\,\beta^*\,m\,, \qquad (3.4)$$

де $m$ - товщина водонасиченого шару гірської породи.

Об`ємна маса прісної води $\Delta_{\text{в}}$ близька до одиниці. Тому можна стверджувати, що для прісної води:

$$\mu^* \approx \beta^*\,m\,, \qquad (3.5)$$

Коефіцієнт пружної ємності гірської породи $\beta^*$являє собою зміну об`єму рідини в одиниці об`єму породи при одиничній зміні напору.

Коефіцієнт пружної водовіддачі $\mu^*$ водонасиченого шару гірської породи являє собою кількість води, яка може бути отримана з одиниці площі напірного пласта при зниженні напору на 1 м. Як і $\mu$, $\mu^*$ вимірюється в долях одиниці.

У виразі (3.3), який по суті відповідає відомому закону Гука, складова $n \cdot \beta_{\text{в}}$ визначає роль пружних деформацій води , а $\beta_{\text{п}}$ - стисливість гірської породи. Першу складову необхідно враховувати лише в «чисто» тріщинуватих породах. В інших випадках головним джерелом пружних запасів води в пласті є зменшення об`єму порового простору.

У цілому абсолютні значення $\beta^*$ невеликі, наприклад:

для пісків (0,5…5,0)·10$^{-4}$ м$^{-1}$;

для супісків та суглинків 10$^{-4}$…10$^{-3}$ м$^{-1}$;

для «чисто» тріщинуватих порід 10$^{-6}$…10$^{-5}$ м$^{-1}$.

Тому при реальних товщинах водоносних пластів, які дорівнюють метрам або десяткам метрів, значення $\mu^*$ зазвичай на один-два порядки менші, ніж значення $\mu$ для тих самих порід.

З цього можна зробити висновок, що в безнапірних пластах, в яких при зниженні рівня мають прояв як гравітаційні, так і пружні запаси, останніми часто нехтують (тому що $\mu^* \ll \mu$). Однак, у деяких суглинистих і глинистих грунтах, а також у так званих тріщинно-порових ґрунтах, значення $\mu^*$ та $\mu$ мало відрізняються.

При зростанні гідродинамічного напору у водоносному пласті (наприклад, при нагнітанні води в пласт) має місце протилежний ефект - пружне розширення порового простору та гідростатичне стиснення рідини в порах. У результаті водоносний пласт приймає в себе деяку додаткову кількість води. Відповідна ємність пласта на одиницю площі має назву *нестачі пружного насичення*, але ця величина зазвичай менша, ніж коефіцієнт пружної водовіддачі цього пласта.

Звичайно приймають, що $\mu^*$ та $\mu$ не залежать від часу. Але в деяких випадках це не так.

Якщо в тріщинуватих або закарстованих породах тріщини та канали розташовані хаотично, причому переважають маленькі тріщини, а серед них є незначна кількість крупних тріщин і пор, треба враховувати, що $\mu^*$ та $\mu$ залежать від часу. Для такого випадку в 1960 р. Г. Баренблатт та Ю. Желтов запропонували *поняття середовища з подвійною ємністю*. Згідно з цим поняттям, порода має гетерогенну структуру, а саме, одне пористе середовище вкладене в інше (рис.3.3).

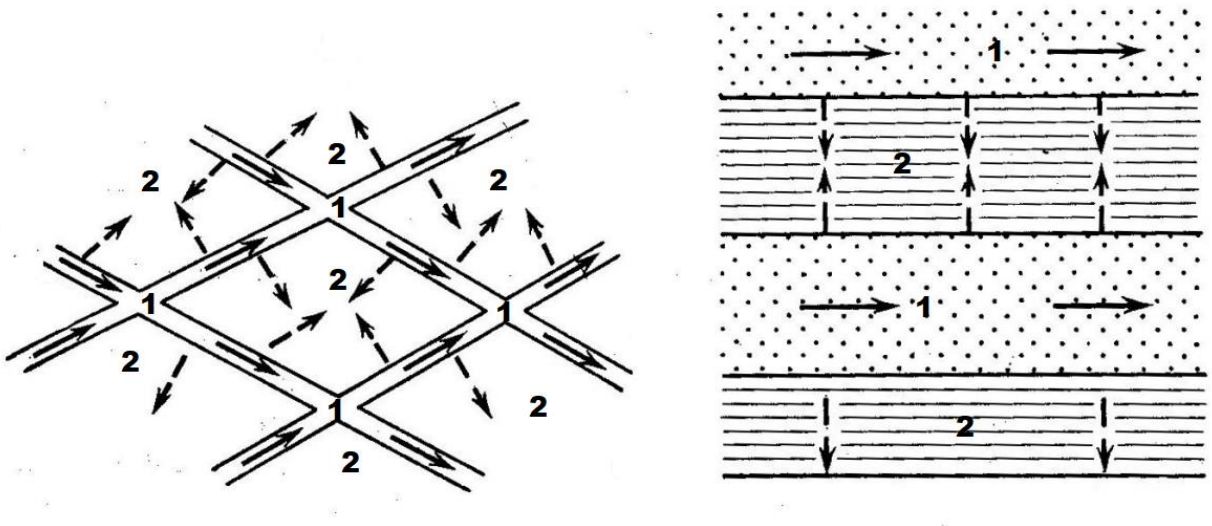


Рис.3.3 До поняття середовища з подвійною ємністю

Тоді рух рідини можна розглядати окремо: у системі крупних тріщин і пор значної проникності, що розділяють шари або блоки (1), та в системі відокремлених шарів або блоків незначної проникності (2). Між системами 1 та 2 існує інтенсивний обмін рідиною.

Якщо з таких порід відбирається вода (наприклад, здійснюється відкачування), то процес має швидкий розвиток у системі 1. У системі 2 процес більш повільний, тому що ця система має більшу водовіддачу. Тому між системами 1 та 2 виникає різниця напорів, що сприяє перетоку води із системи 2 до системи 1. Поступово ця різниця напорів зменшується, а величина водовіддачі стабілізується.

**Контрольні запитання**

1. Що означає поняття «ємнісні властивості» гірських порід?
2. Які види ємності (водовіддачі) гірських порід розглядаються в динаміці підземних вод?
3. Як визначається коефіцієнт гравітаційної водовіддачі гірських порід?
4. Чому чисельно рівний коефіцієнт гравітаційної водовіддачі?
5. Що таке «коефіцієнт недостачі насичення» гірських порід?
6. Що означає поняття «пружна ємність» гірських порід?
7. Що таке коефіцієнт «пружної ємності» гірської породи?
8. Чому чисельно дорівнює коефіцієнт пружної ємності гірської породи?
9. Що таке «коефіцієнт пружної водовіддачі» водоносного пласту?
10. Яку розмірність мають коефіцієнт гравітаційної водовіддачі гірської породи та коефіцієнт пружної водовіддачі водоносного пласту?
11. Яке співвідношення існує між коефіцієнтами пружної та гравітаційної водовіддачі гірських порід?
12. Що означає поняття «середовище з подвійною ємністю»?

# ТЕМА 4. ПОТОКИ ПІДЗЕМНИХ ВОД

У динаміці підземних вод існують поняття про *потік* та *басейн* підземних вод.

Зауважимо, що в загальній та регіональній гідрогеології поняття *«басейн ґрунтових вод»* та *«басейн артезіанських вод»* визначають гідрогеологічну структуру, підземні води якої мають загальні умови виникнення, циркуляції та стоку. Таке уявлення відповідає поняттю *«басейн річки»*.

У динаміці підземних вод поняття *«басейн підземних вод»* має інший зміст. Це поняття визначає зосередження підземних вод у замкненому пласті, для якого є характерними відсутність руху та горизонтальне розташування дійсної або п'єзометричної поверхні підземних вод. Оскільки в природі завжди має місце рух води, поняття *«басейн підземних вод»* у динаміці підземних вод є абстрактним і має лише теоретичне значення. З практичної точки зору до басейну відносять потоки підземних вод з дуже малими швидкостями фільтрації (близькими до нуля).

*Потік підземних вод* у динаміці підземних вод – це гідрогеологічна структура, в якій підземні води знаходяться у стані руху (гідродинамічний напір у різних точках різний).

У динаміці підземних вод застосовуються також поняття *«область фільтрації», «водоносний пласт», «поле фільтрації»*, тощо. Ці поняття слід розглядати як деяке узагальнене уявлення про гідрогеологічну структуру, для якої є характерним рух підземних вод.

## Основні типи потоків підземних вод

Слід звернути увагу, що потоки підземних вод можна типізувати або класифікувати за різними ознаками. При цьому будь-яка типізація чи класифікація є умовною, а той самий потік може відноситись до різних типів або класів у залежності від основи тої чи іншої типізації (класифікації). Розглянемо найбільш поширені варіанти типізації, а саме: за гідродинамічними умовами, за зміною елементів потоку в просторі, за зміною елементів потоку в часі.

*Типізація за гідродинамічними умовами*

Тут розрізняють три типи потоків: безнапірні, напірні та напірно-безнапірні. Слід зауважити, що поняття «безнапірні» застосовується умовно.

*Безнапірні (або ґрунтові) потоки*. Верхньою межею таких потоків є вільна поверхня. Тому іноді безнапірні потоки мають назву «потоки з вільною поверхнею» (рис.4.1).

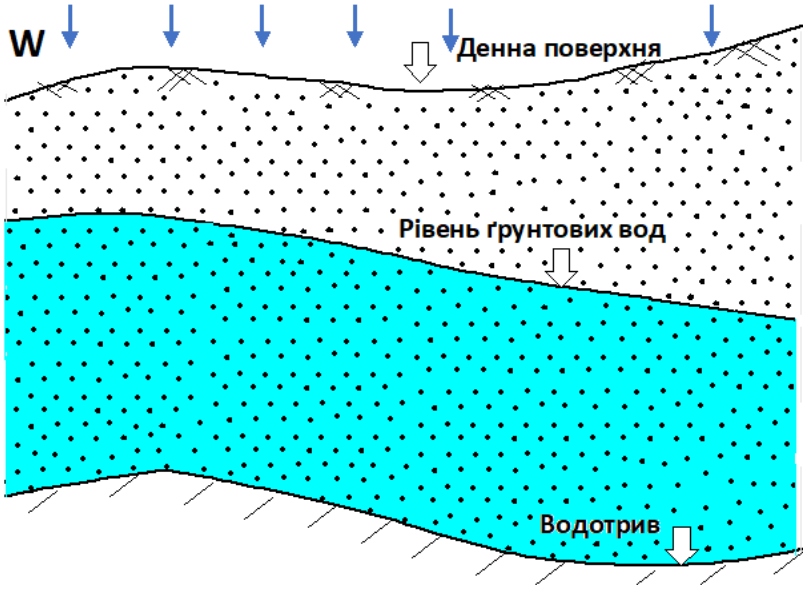


Рис.4.1 Приклад безнапірного потоку

*Напірні потоки.* Верхньою межею таких потоків є водотривкий шар або шар з дуже слабкими фільтраційними властивостями. При розкритті напірного потоку свердловиною рівень підземних вод підіймаються до рівня п’єзометричної поверхні, тобто вище, ніж верхня межа потоку (рис.4.2).

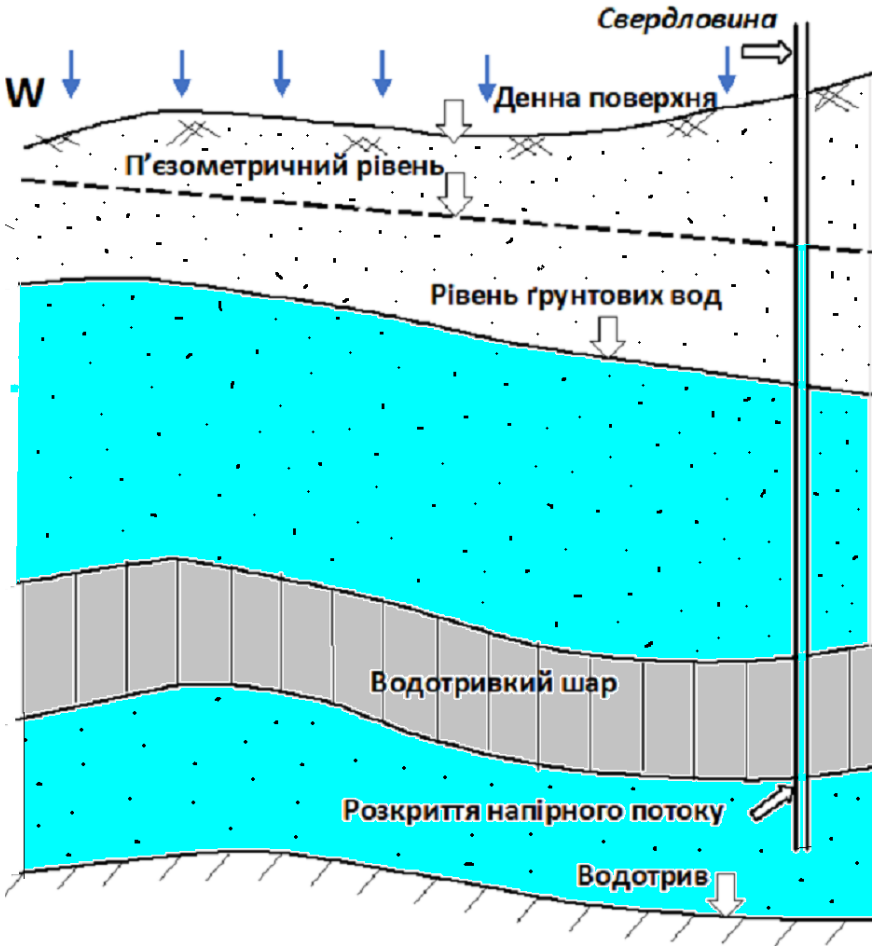


Рис.4.2 Приклад напірного потоку

*Напірно-безнапірні потоки.* В окремих зонах таких потоків має місце або вільна поверхня води (коли потік напірний у цілому), або виникає напірність, коли потік безнапірний у цілому (рис.4.3, 4.4).

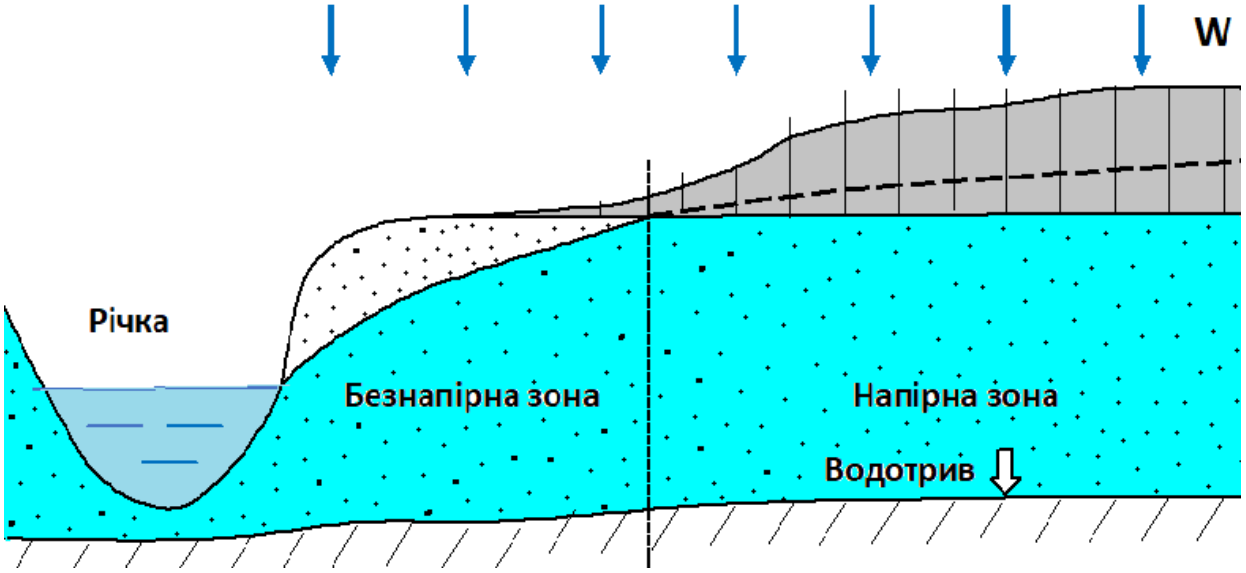


Рис.4.3 Приклад напірно-безнапірного потоку. Безнапірна зона виникла під впливом розвантаження потоку в річку

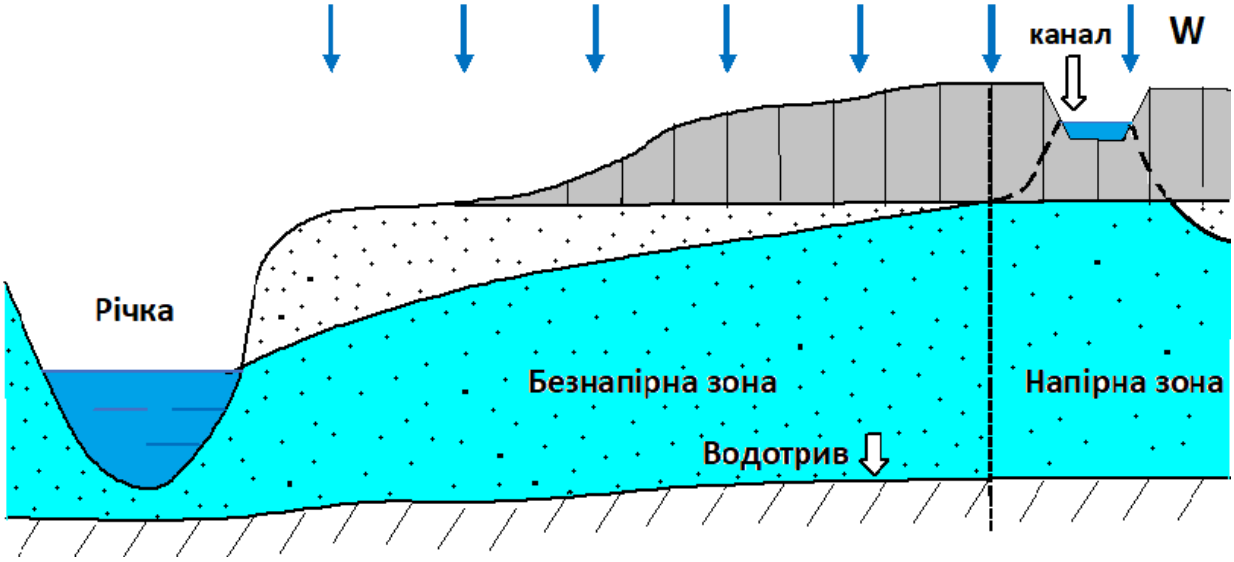


Рис.4.4. Приклад напірно-безнапірного потоку. Напірна зона обумовлена фільтрацією з каналу

*<u>Типізація за зміною елементів потоку в просторі</u>*

Важливим гідродинамічним елементом потоку, що характеризує процес фільтрації, є швидкість потоку підземних вод. Відповідно в даному варіанті типізації розрізняють два типи потоків: рівномірні та нерівномірні.

Для *рівномірних потоків* є характерною стала швидкість руху підземних вод на шляху потоку, а для *нерівномірних потоків* швидкість руху підземних вод на шляху потоку є змінною.

*Типізація за зміною елементів потоку у часі*

Тут також розрізняють два типи потоків: усталені та неусталені.

*Усталені потоки (або стаціонарні) потоки* характеризуються тим, що їхні гідродинамічні елементи в обраній точці не змінюються у часі (є сталими у часі). В *неусталених (або нестаціонарних) потоках* гідродинамічні елементи в обраній точці змінюються у часі.

## Межі потоків. Форма потоків в плані

Розрізняють верхню, нижню та бокові межі потоків.

*Нижнею межею потоку* є його водотривке ложе.

*Верхнею межею потоку* напірних потоків є верхній водотрив, а для безнапірних потоків – вільна поверхня ґрунтових вод.

*Боковими межами* можуть бути так звані геологічні межі або гідрогеологічні межі.

*Геологічні межі* виділяють, коли водоносний пласт або виклинюється, або розмитий, або межує з водотривкими породами.

*Гідрогеологічними межами* є місця розвантаження потоку, місця його живлення (річка, область розлому) і таке ін.

Виділяють також *внутрішні межі*. Це об'єкти, які розташовані на площі розповсюдження потоку: річки, водойми, дрени, свердловини тощо. Як внутрішні межі розглядаються також лінії сполучення зон різної водопроникності на площі розповсюдження потоку.

*Конфігурація меж визначає форму потоків у плані*. В реальних умовах межі потоків мають складну форму, тому при гідрогеологічних розрахунках вони схематизуються.

Виділяють такі *форми (схеми) потоків у плані*: необмежені, напівобмежені та обмежені.

*Необмежені потоки*. Межи потоків знаходяться на дуже великій відстані. Будь-які зміни умов на межах потоків не впливають на ділянку потоку, яка розглядається. Така форма потоку є певною мірою абстрактною.

*Напівобмежені потоки*. Для таких потоків одна межа фіксується у вигляді прямої лінії (рис.4.5).

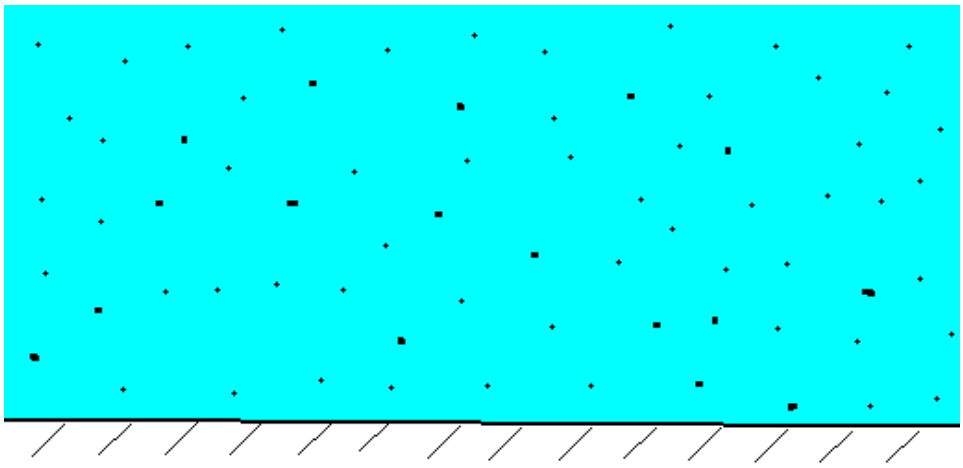

Рис.4.6 Напівобмежений потік у плані

*Обмежені потоки*. Межі таких потоків чітко визначаються, а серед них розрізняють низку форм, приклади яких наведені нижче на рис.4.6-4.10.

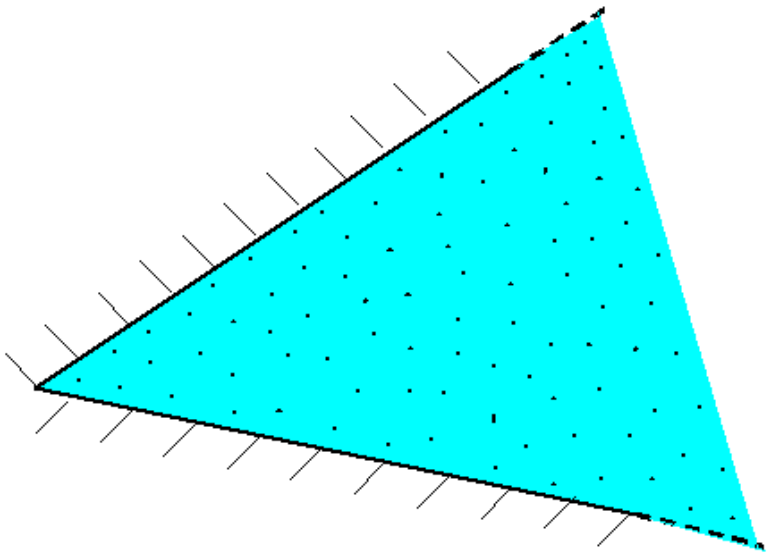

Рис.4.6 Кутовий потік у плані

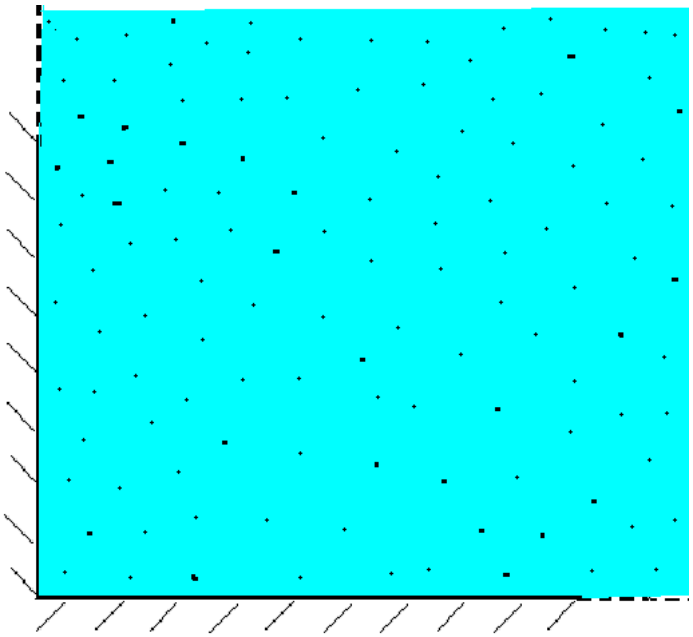

Рис.4.7 Потік-квадрант (різновид кутового потоку) у плані

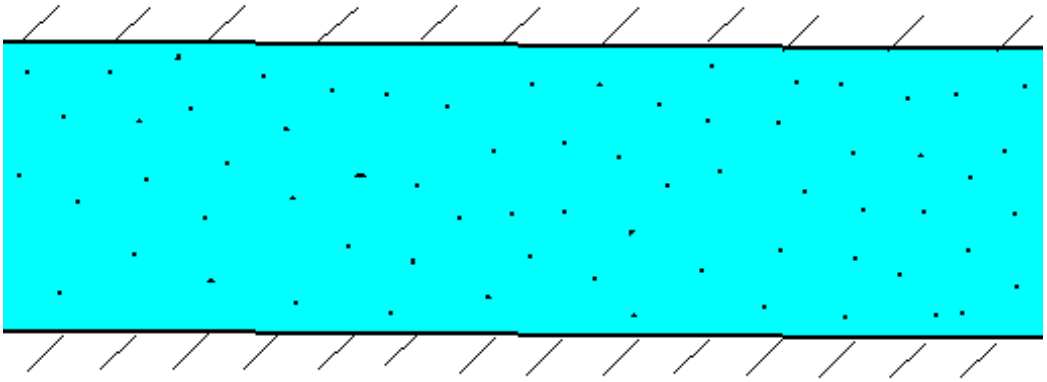

Рис.4.8 Смуговий потік у плані

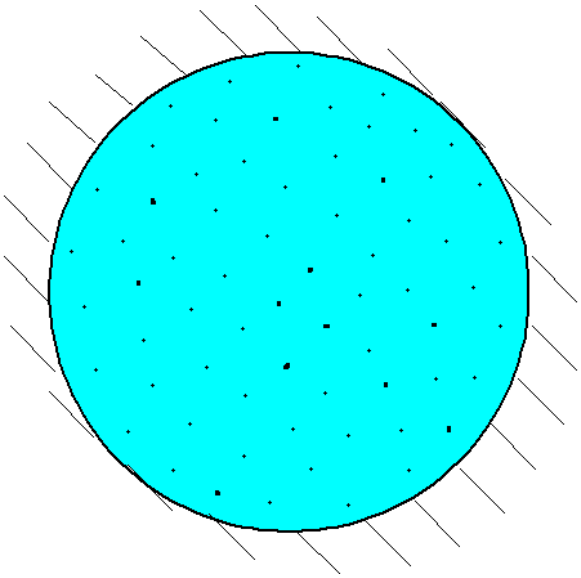

Рис.4.9 Обмежений потік у вигляді кола в плані

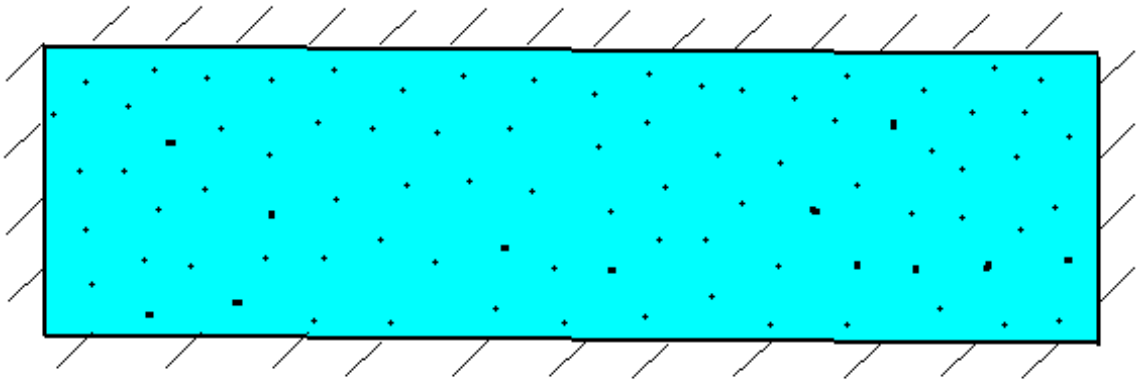

Рис.4.10 Обмежений потік у вигляді прямокутника в плані

**Гідродинамічні елементи потоку**

*Гідродинамічні елементи потоку* - це характеристичні величини, які вміщують у собі основну інформацію про потік і повністю визначають гідродинамічний потік.

Розрізняють п’ять гідродинамічних елементів потоку:

1. *Гідродинамічний напір.*
2. *Напірний градієнт.*
3. *Напрям руху потоку.*
4. *Швидкість фільтрації.*
5. *Фільтраційні витрати потоку.*

*Гідродинамічний напір.* Гідродинамічний напір характеризує питому потенціальну та кінетичну енергію фільтраційного потоку. Величина гідродинамічного напору визначається за рівнянням Бернуллі.

$$H_d = z + \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2\,g}. \qquad (4.1)$$

Швидкість руху підземних вод дуже мала, тому $\frac{v^2}{2\,g} \approx 0$. Таким чином, гідродинамічний напір відповідає п’єзометричному:

$$H_d \approx z + \frac{P}{\gamma}. \qquad (4.2)$$

Іноді напором називають висоту, на яку підіймається вода у свердловині при розкритті напірного водоносного пласту. Але така висота являє собою

тільки частку напору (висоту тиску або п'єзометричну висоту $h_т \approx \frac{P}{\gamma}$ для точок, які розташовані на верхній межі пласту).

*Напірний градієнт*. Визначається як різниця напорів у двох перерізах, яка поділена на відстань між перерізами:

$$I = \frac{H_1 - H_2}{l} = \frac{\Delta H}{l}. \qquad (4.3)$$

Напірний градієнт у точці визначається за формулою:

$$I = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta H}{\Delta l} = -\frac{dH}{dl}. \qquad (4.4)$$

Це є вираз напірного градієнту у диференціальній формулі. Знак мінус поставлений тому, що у напрямі руху потоку значення $I$ збільшується, а значення $H$ зменшується.

*Напрям руху потоку*. Визначається шляхом порівняння гідродинамічних напорів у різних точках потоку. Існує простий спосіб визначення напряму руху потоку за допомогою трьох точок, що розташовані на площині (наприклад, відмітки напору у свердловинах). Схема такого визначення наведена на рис. 4.11, стрілкою показаний визначений напрям руху потоку.

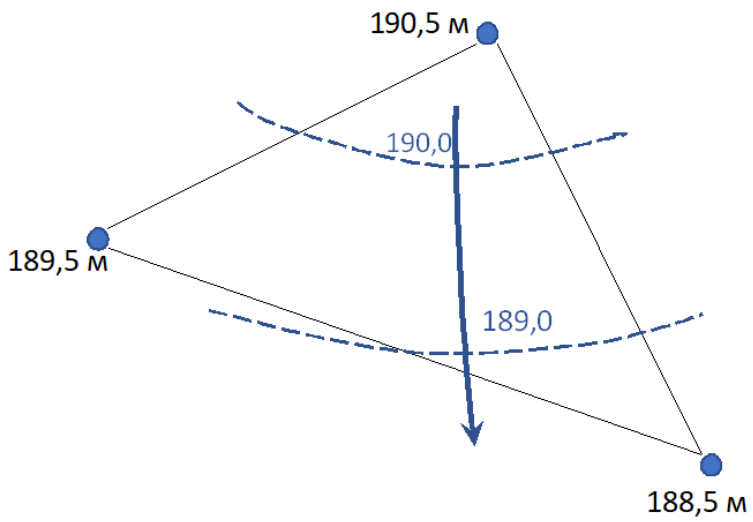


Рис. 4. 11 Схема визначення напряму руху потоку

Більш детально напрям руху потоку визначається за допомогою ліній току. Лінія току – це миттєва кінематична характеристика потоку, яка визначає напрям швидкостей у конкретний момент часу.

Швидкість фільтрації. Цей гідродинамічний елемент віддзеркалює властивості фільтраційного середовища і рідини, характеризує закон фільтрації. Для ламінарного руху визначається згідно із законом Дарсі.

*Фільтраційні витрати*. Ця кількісна характеристика потоку пов'язана з його розмірами. Для ламінарного руху згідно із законом Дарсі:

$$Q = K\ F\ I,\ F = b\ h,\ I = \frac{\Delta H}{l}, \qquad (4.5)$$

де $F$ - площа поперечного перерізу потоку; $b$ - ширина потоку; $h$ - товщина потоку.

Якщо позначити

$$\Phi = \frac{\Delta l}{K\ b\ h}, \qquad (4.6)$$

то можна записати:

$$Q = \frac{\Delta H}{\Phi}, \qquad (4.7)$$

$$\Phi = \frac{\Delta H}{Q}. \qquad (4.8)$$

Величина $\Phi$ має назву *фільтраційного опору*. Це є відношення втрат напору до витрат потоку у межах ділянки потоку. Залежить від розмірів ділянки ( $b, h, l$) та коефіцієнта фільтрації.

## Гідродинамічна сітка фільтраційного потоку

Гідродинамічні елементи потоку змінюються від точки до точки. Тому для характеристики потоку в цілому треба уявити його елементи для всієї області фільтрації. Для цього найбільш зручно застосувати гідродинамічну сітку фільтраційного потоку.

*Гідродинамічна сітка* – це креслення, яке складається з ліній рівного напору та ліній току. Лінії рівного напору будуються з певним фіксованим інтервалом. Лінії току визначають напрям потоку для кожної точки.

Система ліній рівного напору сітки являє собою карту гідроізогіпс (гідроізоп'єз). Якщо таку карту доповнити лініями току ( лінії току ортогональні до ліній рівного напору) то будемо мати гідродинамічну сітку (рис. 4.12).

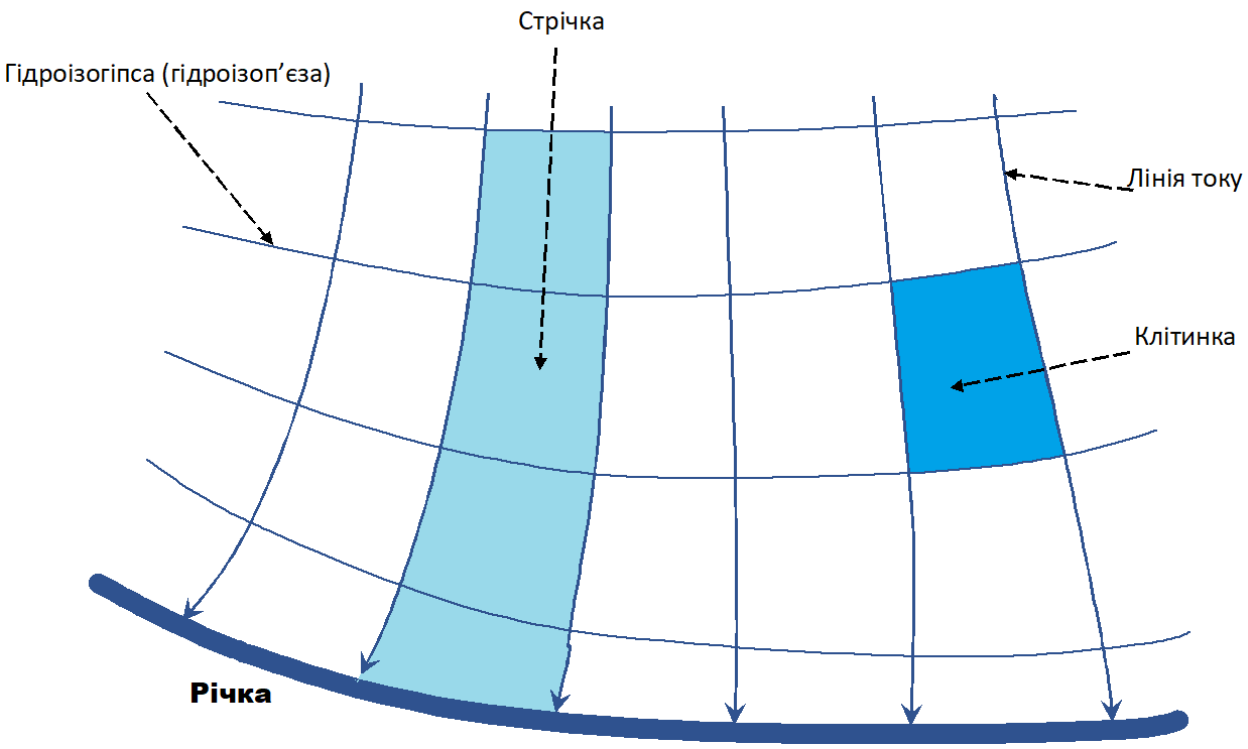


Рис. 4.12 Гідродинамічна сітка фільтраційного потоку та її елементи

Можна виділити *клітинку сітки* та *стрічку сітки*. *Клітинка сітки* утворюється суміжними лініями току і лініями рівних напорів. *Стрічка сітки* – це частка сітки, яка знаходиться між суміжними лініями току. Початок і кінець стрічки співпадають з межами області і фільтрації.

Існують такі *правила побудови* (одночасно *основні властивості*) гідродинамічної сітки:

1) Втрати напору у кожній клітинці сітки повинні бути однаковими.
2) Лінії рівних напорів і лінії току завжди повинні бути ортогональними.
3) Через будь-яку клітинку сітки повинні проходити однакові витрати потоку.

Як відомо, гідродинамічні елементи потоку змінюються у часі. Тому сітка будується або для усталених потоків підземних вод, або для конкретного моменту часу для неусталених потоків.

За допомогою гідродинамічної сітки можна визначити всі гідродинамічні елементи потоку для будь-якої точки.

*Гідродинамічний напір* визначається шляхом інтерполяції між лініями рівного напору. Схема для визначення гідродинамічного напору в довільній точці *M* наведена на рис. 4.13.

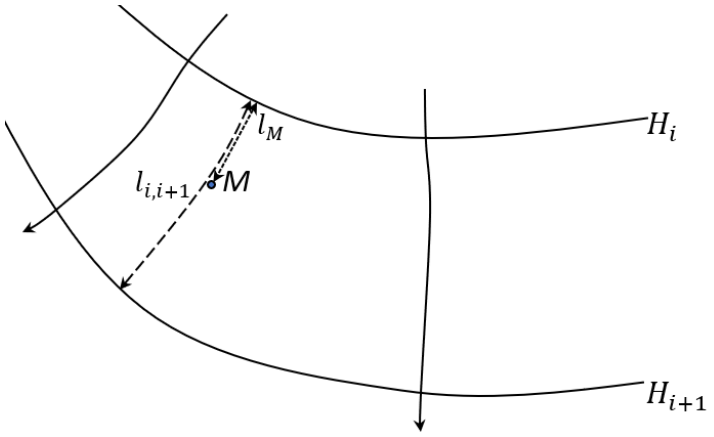


Рис. 4.13 Схема для визначення гідродинамічного напору в точці *M*

У відповідності до методу лінійної інтерполяції

$$\frac{H_{i+1}-H_i}{l_{i,i+1}} = \frac{H_M-H_i}{l_M}, \qquad (4.9)$$

де $H_{i+1}$ та $H_i$ – відповідні відмітки ізоліній гідродинамічного напору; $H_M$ – шукана відмітка гідродинамічного напору в точці *M*; $l_{i,i+1}$та $l_M$ – відстані, що вимірюються на кресленні (див. рис. 4.13).

Тоді відмітка гідродинамічного напору в точці *M* визначається за формулою 4.10:

$$H_M = H_i + \frac{l_M}{l_{i,i+1}}(H_{i+1} - H_i). \qquad (4.10)$$

*Напірний градієнт* визначається як середній у межах клітинки сітки ($I_{\text{сер}}$). Схема для визначення напірного градієнту наведена на рис. 4.14.

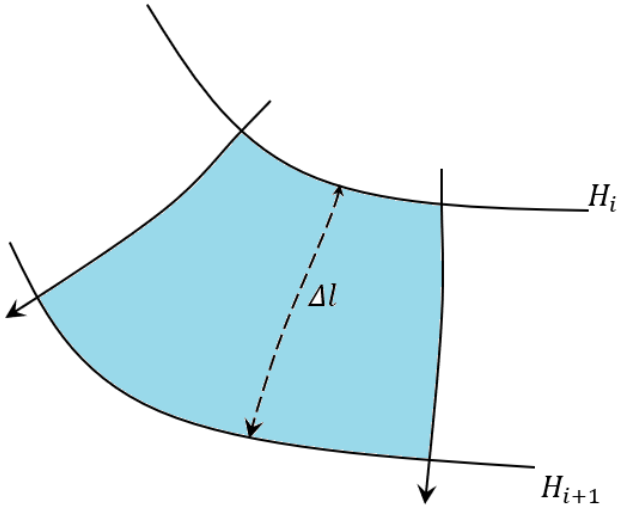


Рис. 4.14 Схема для визначення напірного градієнту $I_{\text{сер}}$

$$I_{\text{сер}} = \frac{\Delta H}{\Delta l}, \qquad (4.10)$$

де $\Delta H = H_i - H_{i+1}$; $\Delta l$ - довжина клітинки сітки з урахуванням масштабу креслення (див. рис. 4.14).

*Напрям руху потоку*. Визначається по лініям току на кресленні.

*Швидкість фільтрації*. Для ламінарного руху визначається за залежністю Дарсі:

$$V_{\text{сер}} = K\, I_{\text{сер}}\,. \qquad (4.11)$$

Зрозуміло, що спочатку визначають напірний градієнт $I_{\text{сер}}$. Також повинен буди відомий коефіцієнт фільтрації $K$.

*Фільтраційні витрати потоку*. Витрати у межах *i*-тої клітинки $Q_i$ для умов ламінарного руху визначають також за залежністю Дарсі (див. рис. 4.15).

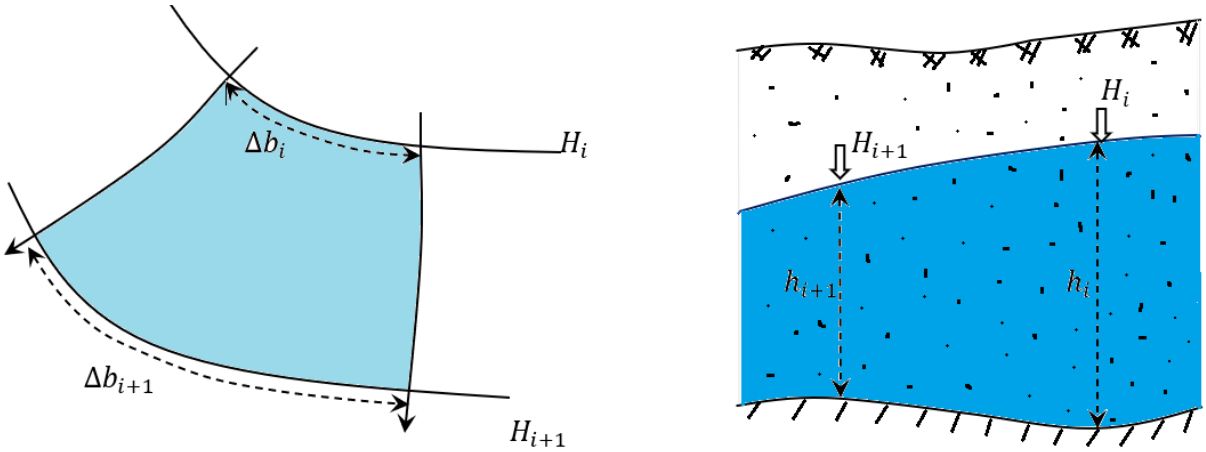


Рис. 4.15 Схема для визначення фільтраційної витрати потоку $Q_i$

$$Q_i = h_{\text{сер}i}\, \Delta b_{\text{сер}i}\, V_{\text{сер}i}\,, \qquad (4.12)$$

де $h_{\text{сер}} = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$ - середня товщина потоку у межах клітинки *i*;

$\Delta b_{\text{сер}i} = \frac{\Delta b_i + \Delta b_{i+1}}{2}$ - середня ширина клітинки *i*;

$V_{\text{сер}i}$ - середня швидкість фільтрації у межах клітинки, визначається за залежністю 4.11.

Фільтраційні витрати усіх клітинок (відповідно, і стрічок) сітки однакові. Тому повні фільтраційні витрати потоку визначають за залежністю:

$$Q_{\text{п}} = Q_i\, n\,, \qquad (4.13)$$

де $n$ - кількість стрічок току у межах області фільтрації.

Розглянемо ще одну властивість сітки, яка має назву «*конформність сітки*».

Для клітинки $i$ запишемо:

$$Q_i = h_{\text{сері}}\, \Delta b_{\text{сері}}\, V_{\text{сері}} = h_{\text{сері}}\, \Delta b_{\text{сері}}\, K_{\text{і}}\, \frac{\Delta H}{\Delta l_i}. \qquad (4.14)$$

Для клітинки $i+1$ запишемо:

$$Q_{i+1} = h_{\text{сері+1}}\, \Delta b_{\text{сері+1}}\, K_{\text{і+1}}\, \frac{\Delta H}{\Delta l_{i+1}}. \qquad (4.15)$$

Як відомо, $Q_i = Q_{i+1}$ . Тому:

$$h_{\text{сері}}\, b_{\text{сері}}\, K_{\text{і}}\, \frac{\Delta H}{\Delta l_i} = h_{\text{сері+1}}\, \Delta b_{\text{сері+1}}\, K_{\text{і+1}}\, \frac{\Delta H}{\Delta l_{i+1}}. \qquad (4.16)$$

$\Delta H = const$, тому:

$$h_{\text{сері}}\, K_{\text{і}}\, \frac{\Delta b_{\text{сері}}}{\Delta l_i} = h_{\text{сері+1}}\, K_{\text{і+1}}\, \frac{\Delta b_{\text{сері+1}}}{\Delta l_{i+1}}. \qquad (4.17)$$

Величина $h \cdot K$ (або $K \cdot h$) має назву *«коефіцієнт водопровідності» («водопровідність»*) і позначається літерою $T$ .

$$T = K \cdot h\,, \qquad (4.18)$$

де $K$ - коефіцієнт фільтрації, $h$ - товщина потоку.

Коефіцієнт водопровідності вимірюється у м$^2$/доб.

Якщо для потоку коефіцієнт водопровідності є сталою величиною ($T$=*const*), то:

$$\frac{\Delta b_{\text{сері}}}{\Delta l_i} = \frac{\Delta b_{\text{сері+1}}}{\Delta l_{i+1}}. \qquad (4.19)$$

Власне властивість *конформності сітки* формулюється так: якщо потік має сталу водопровідність, то відношення ширини клітинки сітки до її довжини є сталою величиною, а саме:

$$\frac{\Delta b_{\text{сер}}}{\Delta l} = const\,. \qquad (4.20)$$

Ця властивість притаманна як для окремої стрічки току сітки, так для сітки у цілому.

## Структура потоків підземних вод

*Структура потоку підземних вод* – це розподіл у потоці напорів, швидкостей та інших гідродинамічних елементів. Цей розподіл проявляється в особливостях течії підземних вод.

Формування структури потоку залежить, у першу чергу, від будови товщі, яка містить воду, тобто, від мінливості водопроникності товщі.

В залежності від *мінливості характеру водопроникності пластів* розрізняють такі основні типи потоків:

1) однорідні;
2) шматково-однорідні (шматково-неоднорідні);
3) однорідно-шаруваті;
4) неоднорідно-шаруваті.

*Однорідні потоки*. Пов'язані з пластами однорідної будови. Водопроникність таких пластів як у перерізі, так і по довжині потоку не змінюється ($K$ = *const*):

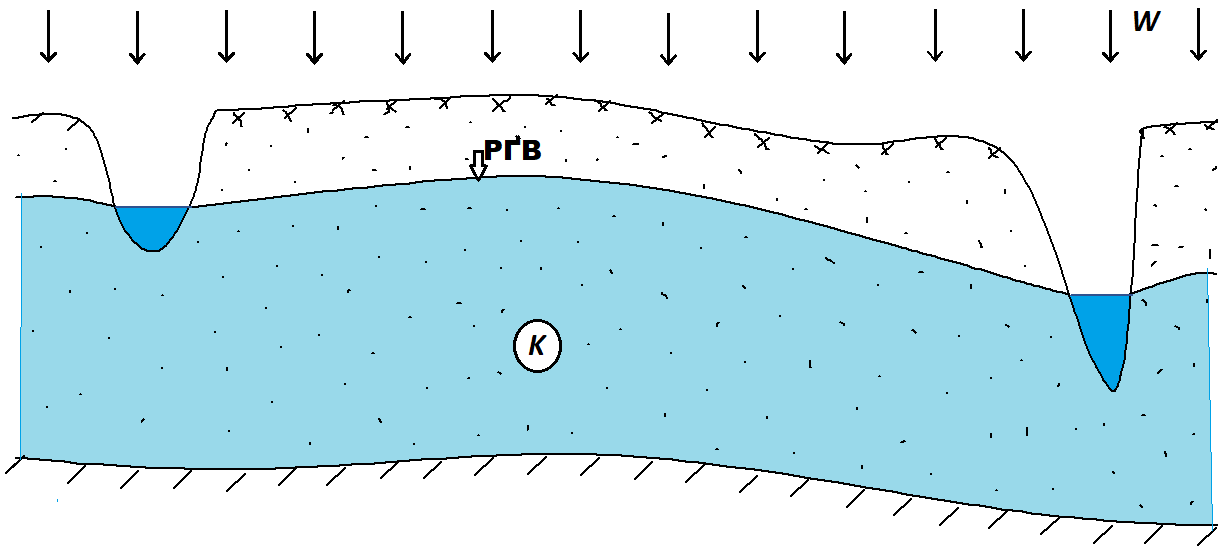


Рис. 4.16 Приклад однорідного потоку

*Шматково-однорідні (шматково-неоднорідні) потоки*. Це потоки, які мають зони з різною водопроникністю по довжині. У межах кожної зони потік однорідний.

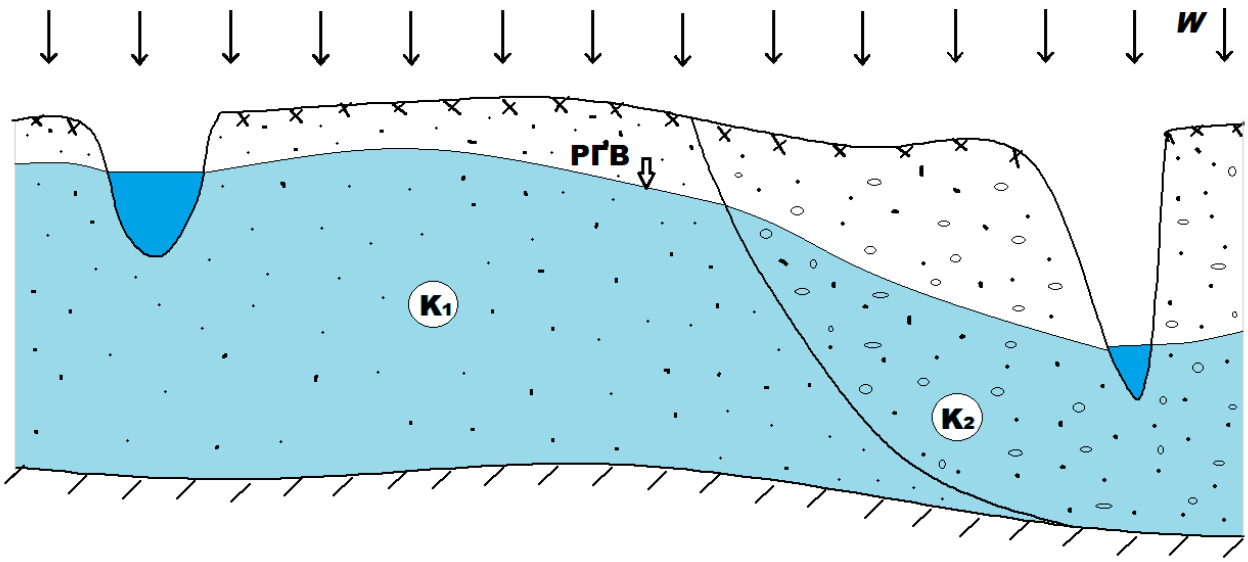


Рис. 4.17 Приклад шматково-однорідного (шматково-неоднорідного) потоку, $К_1$= *const,* $К_2$ = *const,* $К_1 < К_2$

*Однорідно-шаруваті потоки*. Ці потоки пов'язані з шаруватими пластами, водопроникність яких не дуже різниться між собою (коефіцієнти фільтрації різняться у 10÷20).

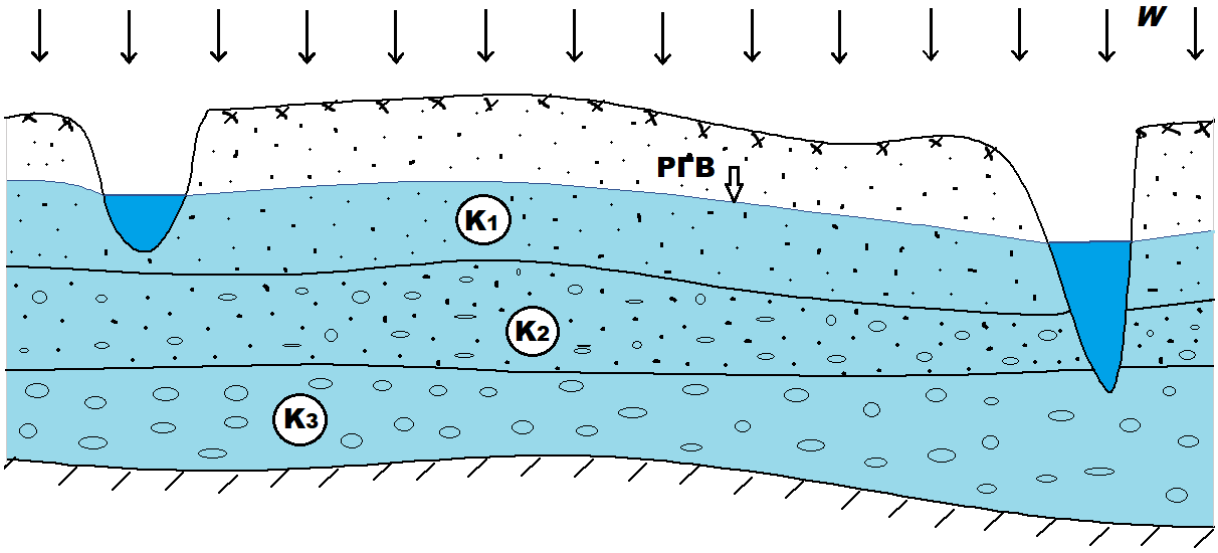


Рис. 4.18 Приклад однорідно-шаруватого потоку,

$$К_1 < К_2 < К_3, \ \frac{K_2}{K_1} \langle 10 \div 20, \ \frac{K_3}{K_2} \langle 10 \div 20$$

*Неоднорідно-шаруваті потоки*. Ці потоки пов'язані з шаруватими пластами, водопроникність яких дуже різниться між собою (коефіцієнти фільтрації різняться більш ніж у 10 ÷ 20 разів). Зазвичай для таких потоків має місце чергування водопроникних і слабопроникних (або роздільних) шарів.

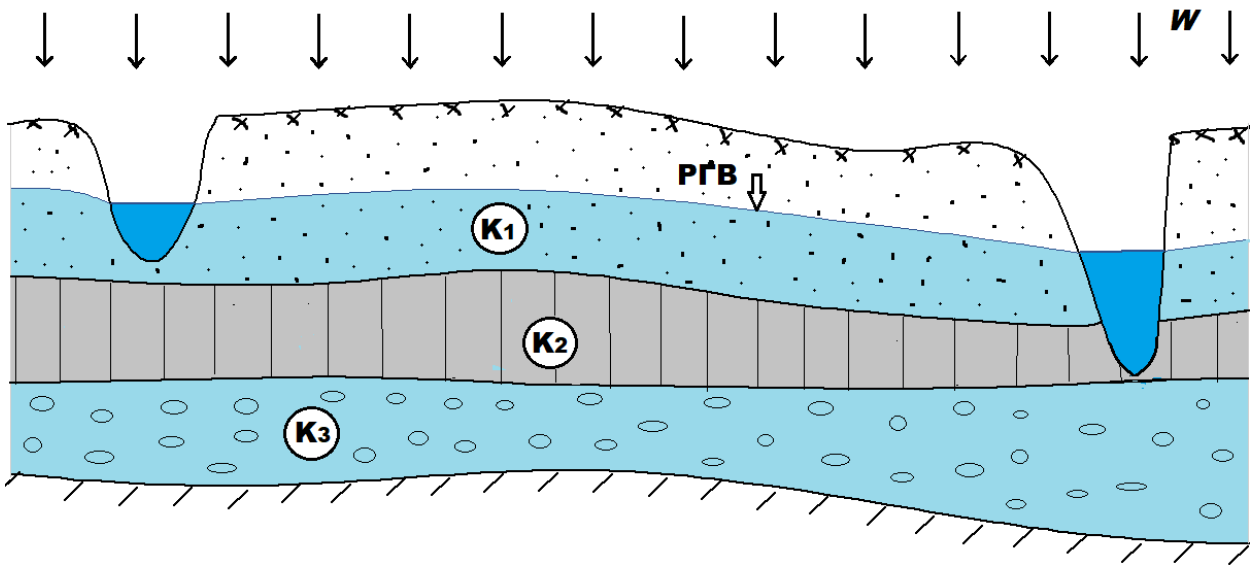


Рис. 4.19 Приклад неоднорідно-шаруватого потоку,
$К_1 > К_2$, $К_2 < К_3$, $К_1 < К_3$, $\frac{K_1}{K_2} \rangle 20$, $\frac{K_3}{K_2} \rangle 20$.

У загальному випадку гідродинамічні елементи потоку залежать (змінюються) від часу (координати часу) та трьох координат простору (*X,У,Z*). Якщо рух потоку усталений, гідродинамічні елементи залежать лише від просторових координат.

За *мінливістю гідродинамічних елементів потоку у просторі* розрізняють потоки:

1) тримірні (просторові),
2) двомірні (плоскі),
3) одномірні (лінійні) потоки.

У загальному випадку потоки *тримірні,* або просторові.

*Двомірні потоки* – це спрощення, коли не враховують рух потоку в одному із трьох напрямів координат.

В цьому зв'язку розрізняють *плоско-вертикальні* і *плоско-горизонтальні потоки*.

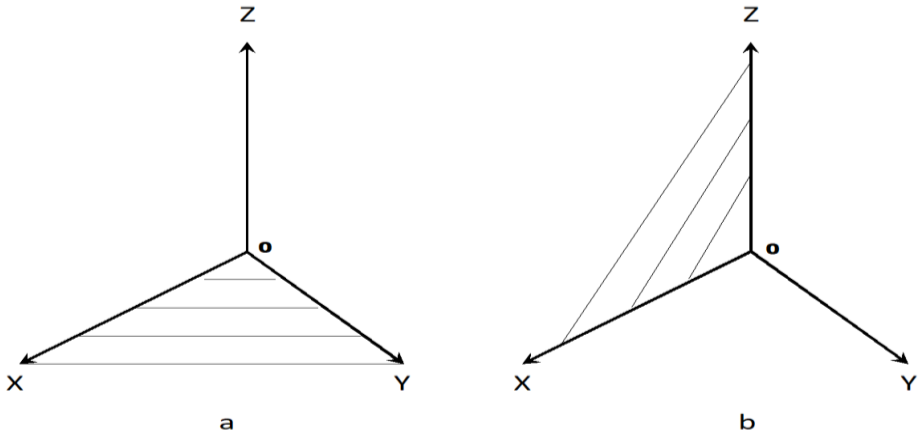


Рис. 4.20 Приклади плоско-горизонтального або планового потоку (a) та плоско-вертикального або профільного потоку (b)

*Одномірні потоки* – це ще більше спрощення, коли не враховують рух потоку у двох із трьох напрямів координат.

Всі особливості зміни гідродинамічних елементів потоку віддзеркалюють за допомогою гідродинамічної сітки. Тому за допомогою сітки визначають структуру потоків підземних вод і можливість зменшення кількості координатних осей. Чим менша кількість осей, тим простіш математичний опис процесу.

Наприклад, маємо таку гідродинамічну сітку у плані (рис.4.21).

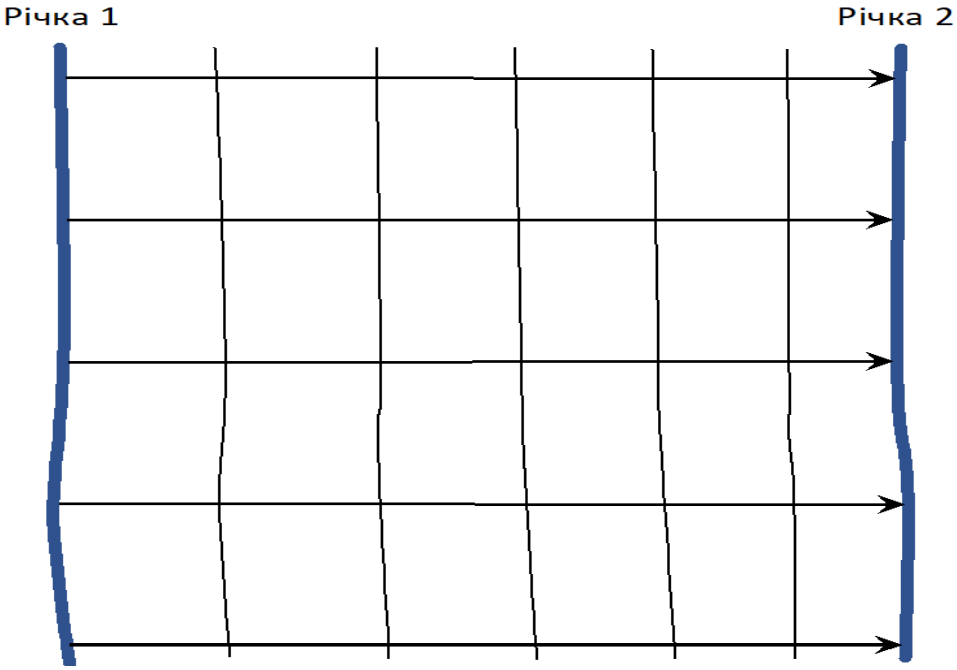


Рис. 4.21 Гідродинамічна сітка у плані

Розгляд рис. 4.21 дозволяє зробити такий висновок: рух потоку можна розглядати як двомірний, а потік як плоско-вертикальний (профільний).

Далі, якщо розглянути такий профільний потік, з'ясується, що основний рух має місце вздовж осі X, а переміщення вздовж осі Z є несуттєвим (рис. 4.22).

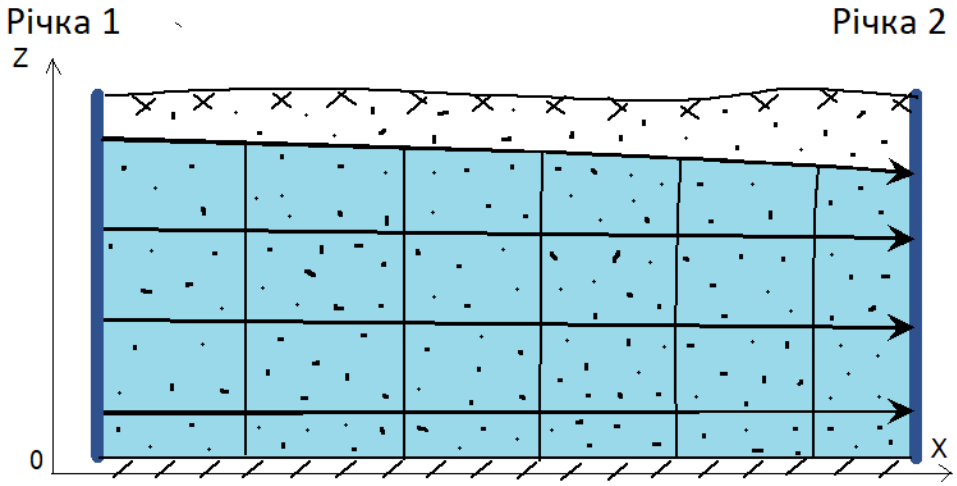


Рис. 4.22 Профільний потік

Тому такий потік можна розглядати як одномірний (лінійний).

Існує також *поняття планово-просторового потоку*. Така специфічна структура потоку має місце для неоднорідно-шаруватих пластів. При розгляді структури потоку в цьому випадку беруть до уваги *передумову перетікання*, яку запропонували М. Гіринський та А. Мятієв.

*Передумова перетікання* полягає у тому, що у добре водопроникних шарах вертикальна складова швидкості фільтрації практично дорівнює нулю, тому має місце рух у горизонтальній площині (планова фільтрація). У роздільних шарах горизонтальна складова швидкості фільтрації практично дорівнює нулю, тому рідина рухається по вертикалі (див. рис. 4.23).

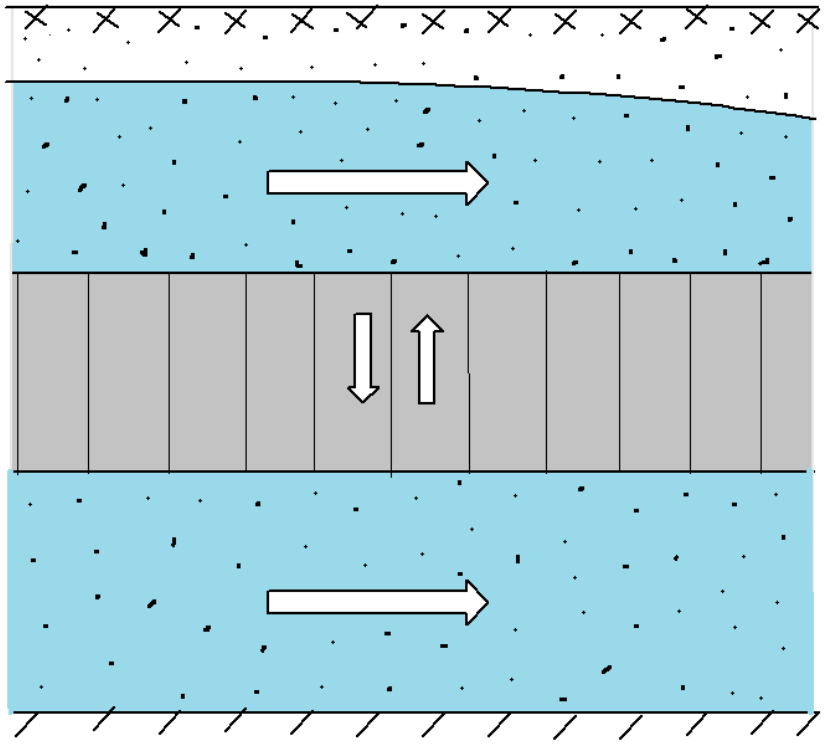

Рис. 4.23 Ілюстрація передумови перетікання

Тому у водопроникних шарах потік є плановим, а у роздільних шарах є вертикальним. Звідси і назва планово-просторовий потік.

Всі розглянуті структури потоків відносяться до *ізотропного середовища* (коефіцієнт фільтрації однаковий у будь-якому напрямку). Але на практиці мають місце також *анізотропні пласти*, для яких коефіцієнт фільтрації є функцією координат:

$$K = f(X, Y, Z)\,. \qquad (4.21)$$

**Контрольні запитання**

1. Що являє собою поняття «басейн» в динамці підземних вод?
2. Що означає поняття «потік» в динамці підземних вод?
3. Як класифікуються потоки підземних вод за гідравлічними ознаками?
4. Що таке безнапірний потік підземних вод?

5. Що таке напірний потік підземних вод?
6. Що таке напірно-безнапірний потік підземних вод?
7. Як класифікуються потоки підземних вод по зміні їх елементів у просторі?
8. Що таке рівномірний потік підземних вод?
9. Що таке нерівномірний потік підземних вод?
10. Як класифікуються потоки підземних вод по зміні їх елементів у часі?
11. Що таке усталений потік підземних вод?
12. Що таке неусталений потік підземних вод?
13. Які межі потоків виділяються у динамці підземних вод?
14. Що можна вважати верхньою межею потоків підземних вод?
15. Що являє собою нижня межа потоків підземних вод?
16. Що таке бокові межі потоків підземних вод?
17. Що таке внутрішня межа потоків підземних вод?
18. Яка схематизація меж потоків характеризує їх різновидності в плані?
19. Що таке необмежені потоки підземних вод?
20. Що таке напівобмежені потоки підземних вод?
21. Які потоки підземних вод називаються обмеженими?
22. Які види обмежених потоків виділяються у динамці підземних вод?
23. Що таке гідродинамічні елементи потоку підземних вод?
24. Які існують гідродинамічні елементи потоку підземних вод?
25. Як можна визначити напрямок руху потоку підземних вод?
26. Що таке швидкість фільтрації підземних вод?
27. Що таке фільтраційна витрата потоку підземних вод?
28. Що таке фільтраційний опір потоку підземних вод?
29. Що таке коефіцієнт водопровідності водоносного шару?
30. Яку розмірність має коефіцієнт водопровідності?
31. Що таке гідродинамічна сітка фільтрації?
32. З яких елементів складається гідродинамічна сітка фільтрації?
33. За якими правилами будується гідродинамічна сітка фільтрації?
34. Що характеризує гідродинамічна сітка фільтрації?
35. Що таке «властивість конформності» гідродинамічної сітки фільтрації?
36. Що таке «структура потоку» підземних вод?
37. Які основні чинники впливають на формування структури потоку підземних вод?
38. Які основні типи потоків виділяють в залежності від характеру водопроникності пластів?
39. Що таке однорідні потоки підземних вод?
40. Що таке шматково-однорідні (шматково-неоднорідні) потоки підземних вод?
41. Які потоки підземних вод називаються однорідно-шаруватими?
42. Які потоки підземних вод називаються неоднорідно-шаруватими?

43. Яку мірність течії мають реальні потоки підземних вод у динамці підземних вод?
44. Які потоки підземних вод по мірності течії розглядається в динамці підземних вод?
45. Які потоки підземних вод вважаються лінійними (одномірними)?
46. Які потоки підземних вод вважаються площинними (двомірними)?
47. Як класифікують двомірні потоки підземних вод?
48. Що таке площинно-горизонтальний потік підземних вод?
49. Що таке площинно-вертикальний потік підземних вод?
50. Що таке планово-просторовий потік підземних вод?
51. Які середовища називають ізотропними та анізотропними?

# ТЕМА 5. ВИХІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ФІЛЬТРАЦІЇ

## Рівняння нерозривності у просторовому фільтраційному потоці

Отримання вихідних диференціальні рівнянь фільтрації починається з отримання рівняння нерозривності у просторовому фільтраційному потоці. Для цього виділимо нескінченно малий елемент простору і розглянемо для нього баланс ваги рідини протягом нескінченно малого часу $dt$ (рис. 5.1).

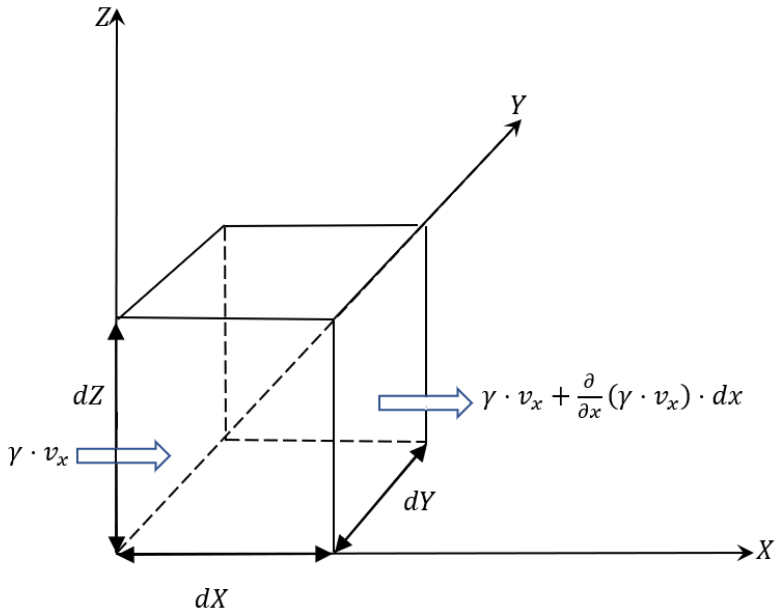


Рис. 5.1 Ілюстрація до визначення балансу ваги у нескінченно малому елементі просторового фільтраційного потоку

Позначимо як $v_x, v_y, v_z$ складові швидкості фільтрації у напрямах осей $X, Y, Z$. Якщо напрям швидкості співпадає з напрямом осі, швидкість має знак «+», якщо ні, то «-». Позначимо питому вагу рідини як $\gamma$. Тоді *вагові витрати потоку* в напрямі $X$ на вході в елемент складають

$$\gamma\ v_x\ dy\ dz\ . \qquad (5.1)$$

Відзначимо, що вагові витрати – це добуток $\gamma\ Q$; витрати потоку $Q$ – це добуток $v_x\ F$; а площа перерізу потоку $F$– це добуток $dy\ dz$.

Таким чином, вагові витрати – це добуток $\gamma\ v_x\ dy\ dz$, а $\gamma\ v_x$ – це *вагова швидкість*.

На виході з елементу у напрямі $X$ вагова швидкість отримує приріст $\frac{\partial}{\partial x}(\gamma\ v_x)\ dx$. Тому вагові витрати потоку, що виходить з елементу у напрямі $X$, складають:

$$\left[\gamma\, v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\gamma\, v_x)\, dx\right] dy\, dz. \qquad (5.2)$$

Таким чином, різниця між ваговими витратами на вході і виході у напрямі $X$ дорівнює:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\gamma\, v_x)\, dx\, dy\, dz\,. \qquad (5.3)$$

Таким самим чином отримуємо різницю між ваговими витратами на вході і виході в інших напрямках.

Для осі $Y$:

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma\, v_y\right) dx\, dy\, dz\,. \qquad (5.4)$$

Для осі $Z$:

$$-\frac{\partial}{\partial z}(\gamma\, v_z)\, dx\, dy\, dz\,. \qquad (5.5)$$

Ці зміни приведуть до того, що зміниться вагова кількість рідини в елементі, що розглядається. Початкова вагова кількість може бути визначена як

$$\gamma\, n\, dx\, dy\, dz\,, \qquad (5.6)$$

де $n$ – пористість фільтраційного середовища.

Протягом часу $dt$ вагова кількість рідини отримує приріст

$$\frac{\partial}{\partial t}(\gamma\, n\, dx\, dy\, dz)\, dt\,. \qquad (5.7)$$

Виходячи із необхідності дотримання умов балансу, маємо:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}\gamma\, v_x + \frac{\partial}{\partial y}\gamma\, v_y + \frac{\partial}{\partial z}\gamma\, v_z\right) dx\, dy\, dz\, dt = \frac{\partial}{\partial t}(\gamma\, n\, dx\, dy\, dz)\, dt. \qquad (5.8)$$

Після скорочення нескінченно малих $dx, dy, dz, dt$ маємо:

$$\frac{\partial}{\partial x}\gamma\, v_x + \frac{\partial}{\partial y}\gamma\, v_y + \frac{\partial}{\partial z}\gamma\, v_z + \frac{\partial}{\partial t}\gamma\, n = 0\,. \qquad (5.9)$$

Це і є *рівняння нерозривності.*

Якщо питома вага рідини є сталою величиною ($\gamma$ = const), рівняння нерозривності має вигляд:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial n}{\partial t} = 0\ . \qquad (5.10)$$

*Рівняння фільтрації* визначає розподіл у потоці гідродинамічних напорів. Таке рівняння можна отримати за допомогою рівняння нерозривності, якщо пов'язати величини швидкості в рівнянні нерозривності з гідродинамічним напором.

**Рівняння жорсткого режиму фільтрації**

При жорсткому режимі фільтрації нехтують деформацією фільтраційного середовища гірської породи, тому $\frac{\partial}{\partial t}(\gamma\, n) = 0$.

Якщо $\gamma$ = *const*, маємо:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0\ . \qquad (5.11)$$

Щоб отримати рівняння фільтрації з рівняння нерозривності, треба складові швидкості фільтрації пов'язати з гідродинамічним напором. За умов ламінарного руху рідини швидкість фільтрації пов'язана з гідродинамічним напором за допомогою основного закону фільтрації, а саме:

$$v_x = -K_x \frac{\partial H}{\partial x}\,, \qquad (5.12)$$

$$v_y = -K_y \frac{\partial H}{\partial y}\,, \qquad (5.13)$$

$$v_z = -K_z \frac{\partial H}{\partial z}\,, \qquad (5.14)$$

де $K_x, K_y, K_Z$ – коефіцієнти фільтрації у напрямах осей координат.

Тому *рівняння жорсткого режиму фільтрації* має вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial H}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial H}{\partial z}\right) = 0\ . \qquad (5.15)$$

Це є еліптичне рівняння математичної фізики.

Для *однорідно-ізотропних пластів* (коли $K_x = K_y = K_Z = const$), таке рівняння має вигляд:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0\,. \qquad (5.16)$$

Це є *рівняння Лапласа*, одне із широко відомих рівнянь математичної фізики. Функція, яка відповідає цьому рівнянню, має назву *гармонічної (потенційної)*.

Якщо пласт є *однорідно-анізотропним* або *шматково-однорідним* (коли $K_x \neq K_y \neq K_Z$), рівняння жорсткого режиму фільтрації має вигляд:

$$K_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0\,. \qquad (5.17)$$

Таке рівняння теж може бути подано у вигляді рівняння Лапласа шляхом так званого лінійного перетворення координат.

При отриманні рівнянь фільтрації не накладались обмеження відносно стаціонарності течії. Тому ці рівняння справедливі як для стаціонарного (усталеного) потоку, так і для нестаціонарного (неусталеного) потоку. Але треба звернути увагу, що в рівняннях похідні за часом відсутні.

Аналітичні розв'язки рівняння Лапласа базуються на використанні комплексу методів теорії поля.

## Рівняння пружного режиму фільтрації

Для отримання рівняння пружного режиму фільтрації слід враховувати складову рівняння нерозривності $\frac{\partial}{\partial t}(\gamma\, n)$ .

Деформацію будемо розглядати як пружну, тому застосуємо поняття коефіцієнта пружної ємності гірської породи $\beta^*$ (див. тему 3).

Якщо $\gamma$ = *const*,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\gamma\, n) = \gamma\, \beta^* \frac{\partial H}{\partial t}\,. \qquad (5.18)$$

Тоді рівняння нерозривності має вигляд:

$$\gamma \frac{\partial v_x}{\partial x} + \gamma \frac{\partial v_y}{\partial y} + \gamma \frac{\partial v_z}{\partial z} + \gamma\, \beta^* \frac{\partial H}{\partial t} = 0\,. \qquad (5.19)$$

Якщо режим фільтрації є ламінарним, *рівняння пружного режиму фільтрації* буде мати такий вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(K_y \frac{\partial H}{\partial \mathrm{y}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial H}{\partial z}\right) = \beta^* \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (5.20)$$

Якщо пласт є *шматково-однорідним* або *однорідно-анізотропним*, рівняння має вигляд:

$$K_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + K_\mathrm{y} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathrm{y}^2} + K_z \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \beta^* \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (5.21)$$

Для *однорідно-ізотропних пластів* (коли $K_x = K_y = K_Z = const$):

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{\beta^*}{K} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (5.22)$$

Це рівняння відповідає відомому в математичній фізиці *рівнянню Фур'є (рівнянню теплопровідності)*.

До рівняння, яке відповідає шматково-однорідному або однорідно-анізотропному пласту, можна також застосувати перетворення координат.

Напишемо рівняння Фур'є у такому вигляді:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{\beta^* m}{K m} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (5.23)$$

де $m$ – товщина потоку.

Як відомо з теми 3, $\beta^* m = \mu^*$, де $\mu^*$ - коефіцієнт пружної водовіддачі пласту.

Відповідно $K m = T$, де $T$ – коефіцієнт водопровідності пласту.

Тому:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{\mu^*}{T} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (5.24)$$

За пропозицією В. Щелкачова застосовується поняття *коефіцієнту п'єзопровідності* $a_n$:

$$a_n = \frac{T}{\mu^*}. \quad (5.25)$$

Коефіцієнт п’єзопровідності визначає характер розвитку процесу пружного режиму фільтрації у часі, має таку ж саму розмірність, як і коефіцієнт водопровідності.

При застосуванні коефіцієнту п’єзопровідності рівняння пружного режиму фільтрації має вигляд:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{1}{a_n}\frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (5.26)$$

**Контрольні запитання**

1. Які природні сили обумовлюють явище фільтрації рідини крізь гірські породи?
2. Які сили протидіють процесу фільтрації рідини крізь гірські породи?
3. Що таке жорсткий режим фільтрації?
4. Що взято за основу виводу рівняння нерозривності?
5. Який вигляд має рівняння нерозривності?
6. В чому полягає зміст рівняння фільтрації?
7. Який вигляд має рівняння жорсткого режиму фільтрації?
8. Який вигляд має рівняння жорсткого режиму фільтрації для однорідно-ізотропних пластів?
9. Який вигляд має рівняння жорсткого режиму фільтрації для однорідно-анізотропних або шматково-однорідних пластів?
10. Справедливі чи ні рівняння жорсткого режиму фільтрації для неусталених потоків підземних вод?
11. Як записується рівняння нерозривності для пружного режиму фільтрації?
12. Як перейти від рівняння нерозривності до рівняння пружного режиму фільтрації?
13. Який вигляд має рівняння пружного режиму фільтрації для шматково-однорідних або однорідно-анізотропних пластів?
14. Який вигляд має рівняння пружного режиму фільтрації для однорідно-ізотропних пластів?
15. Як в рівнянні пружного режиму фільтрації враховуються водопроникні властивості водовмісної породи?
16. Який вигляд має рівняння пружного режиму фільтрації при застосуванні коефіцієнту п’єзопровідності?

# ТЕМА 6. ОСНОВНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЛАНОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ

При отриманні вихідних рівнянь фільтрації (див. тему 5) рух рідини розглядається як просторовий.

Але сітки фільтрації для різних реальних потоків підземних вод мають одну загальну особливість, а саме: при віддаленні від меж області фільтрації лінії рівних напорів у розрізі потоку стають все більш вертикальними, а лінії току - все більш горизонтальними. Тому можна зробити такий висновок: *на віддаленні від меж області фільтрації рух потоку можна розглядати як плановий*. Дослідним шляхом встановлено, що суттєве відхилення від планового руху має місце лише на відстані $m$ від межі області фільтрації, де $m$ – товщина потоку. У випадку планової фільтрації приймається, що $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$.

Як відомо, в гідрогеології зазвичай розглядаються структури, розміри яких по площині набагато перевищують товщину пластів. Це дозволяє прийняти розрахункову модель планової фільтрації як задовільну у переважній більшості практичних випадків. Перевага такої моделі полягає у тому, що ми розглядаємо не тримірну, а двомірну задачу. Відповідно у диференціальному рівнянні маємо тільки дві просторових координати, що значно спрощує подальше розв'язання задачі. При цьому треба звернути увагу на те, що *поблизу меж фільтраційного потоку застосування моделі планової фільтрації вимагає певних коригуючих процедур.*

*Уявлення про незначну товщину потоку в порівнянні з його горизонтальними розмірами, а також про незначний нахил п'єзометричної поверхні потоку* запропоноване Ж. Дюпюі. Таке уявлення має назву *передумови Дюпюі.* Базуючись на передумові Дюпюі, Ф. Форхгеймер та М. Павловський розробили у подальшому гідравлічну теорію фільтрації.

## Планова фільтрація в ізольованому напірному пласті

Для *жорсткого режиму* фільтрації рівняння нерозривності має вигляд (див. тему 5):

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \,. \qquad (6.1)$$

Це рівняння отримано для нескінченно малого елементу простору (рис. 5.1).

Якщо, по-перше, прийняти передумову Дюпюі $(\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0)$; по-друге, розглянути елемент фільтраційного потоку, який має нескінченно малу площу $(dx\ dy)$ та висоту $m$ ($m$ – товщина потоку); по-третє, записати вираз для швидкості потоку згідно із законом Дарсі, будемо мати таке рівняння фільтрації:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T_x \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T_y \frac{\partial H}{\partial y}\right) = 0, \qquad (6.2)$$

де $T_x = K_x\, m,\ T_y = K_y\, m.$

У випадку, коли $T_x = T_y = T = const$, маємо

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0\,. \qquad (6.3)$$

Для *пружного режиму* за аналогією маємо:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T_x \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T_y \frac{\partial H}{\partial y}\right) = \mu^* \frac{\partial H}{\partial t}\,, \qquad (6.4)$$

де $\mu^*$- коефіцієнт пружної водовіддачі пласту.

У випадку, коли $T_x = T_y = T = const$, маємо:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{1}{a_n}\frac{\partial H}{\partial t}\,, \qquad (6.5)$$

де $a_n = \frac{T}{\mu^*}$ - коефіцієнт п’єзопровідності.

**Планова напірна фільтрація при наявності перетікання**

Розглянемо схему з двох напірних потоків, які мають напори $H$ та $H'$ відповідно (рис. 6.1):

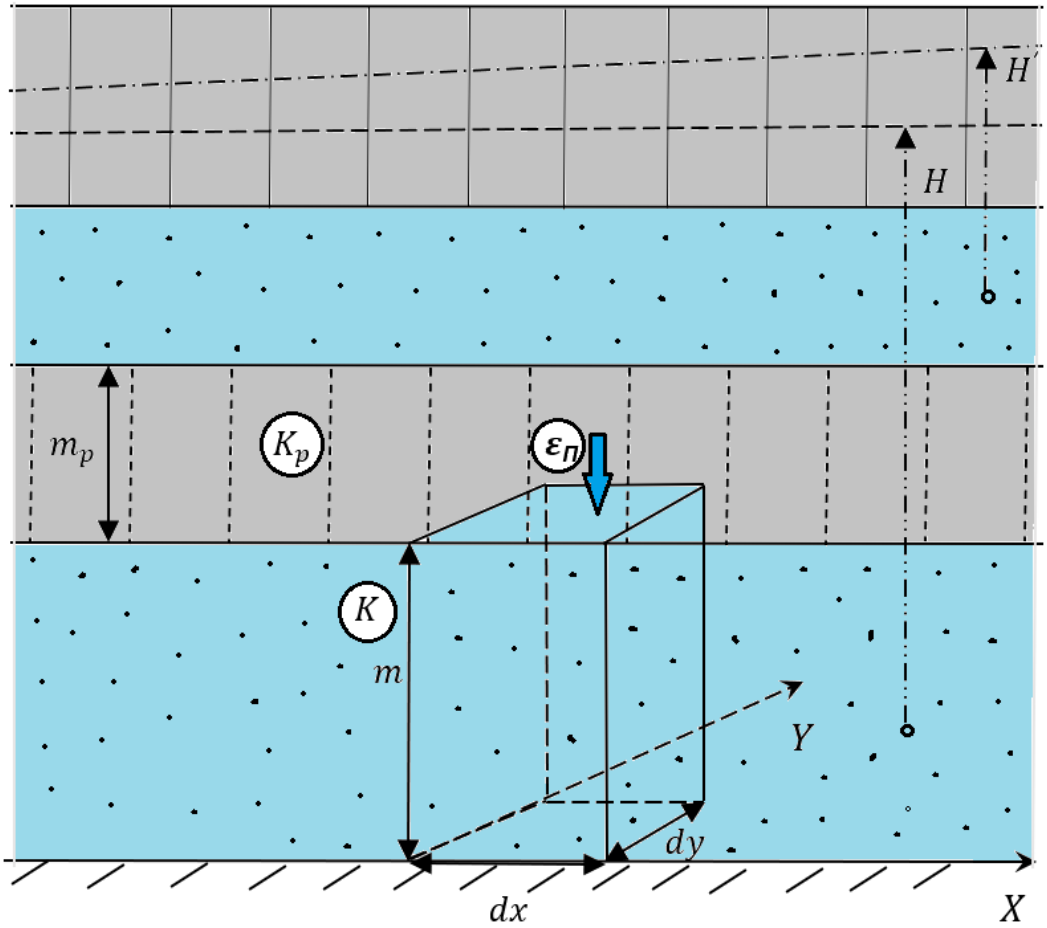


Рис. 6.1 Схема планової напірної фільтрації при наявності перетікання

При отриманні рівняння нерозривності для елементу, який має нескінченно малу площу $(dx\ dy)$ та висоту $m$ ($m$ – товщина потоку), врахуємо надходження рідини в елемент не тільки з боків, а й зверху. Зверху надходить рідина через роздільний пласт. Якщо врахувати передумову перетікання, довжина шляху фільтрації через роздільний слабопроникний пласт становить $m_p$, а градієнт фільтрації дорівнює:

$$I_p = \frac{H' - H}{m_p}. \qquad (6.6)$$

Режим фільтрації у роздільному пласті ми розглядаємо як жорсткий, тобто нехтуємо пружними запасами рідини у ньому.

Тоді можна вважати, що зверху на одиницю площі пласту за одиницю часу надходить додатковий об’єм рідини:

$$\varepsilon_П = K_p\ \frac{H' - H}{m_p}, \qquad (6.7)$$

де $K_p$ - коефіцієнт фільтрації роздільного пласту.

Тоді рівняння нерозривності для елементу потоку, що розглядається, за умови $\gamma = const$, має вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x}(m\, v_x) + \frac{\partial}{\partial y}\left(m\, v_y\right) + \frac{\partial}{\partial t}(m\, n) + \varepsilon_П = 0\,, \qquad (6.8)$$

де $n$ – пористість фільтраційного середовища.

Якщо потік має незмінну товщину $(m = const)$, пласт є однорідним ізотропним $(K = const)$, а режим течії є ламінарним $(v = K\, I)$, маємо:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{K_p}{m_p \cdot T}\left(H' - H\right) = \frac{1}{a_n}\,\frac{\partial H}{\partial t}\,. \qquad (6.9)$$

Існує поняття «*параметр (фактор) перетікання»* $B$:

$$B = \sqrt{\frac{T\, m_p}{K_p}}\,. \qquad (6.10)$$

Тоді рівняння матиме вигляд:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{H' - H}{B^2} = \frac{1}{a_п}\,\frac{\partial H}{\partial t}\,. \qquad (6.11)$$

Існує також поняття *«показник перетікання»* $b$:

$$b = \frac{1}{B} = \sqrt{\frac{K_p}{T\, m_p}}\,. \qquad (6.12)$$

Тоді рівняння фільтрації матиме вигляд:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + b^2\left(H' - H\right) = \frac{1}{a_p}\frac{\partial H}{\partial t}\,. \qquad (6.13)$$

Таким самим чином можна отримати рівняння фільтрації з урахуванням перетікання як через верхній, так і через нижній слабопроникні пласти.

## Планова фільтрація у безнапірному пласті

Особливістю такої фільтрації є те, що при зниженні депресійної поверхні товщина потоку $h$ змінюється. Тому у розрахунковий елемент потоку

надходить додатковий об'єм рідини, який обумовлений гравітаційною водовіддачею (рис. 6.2).

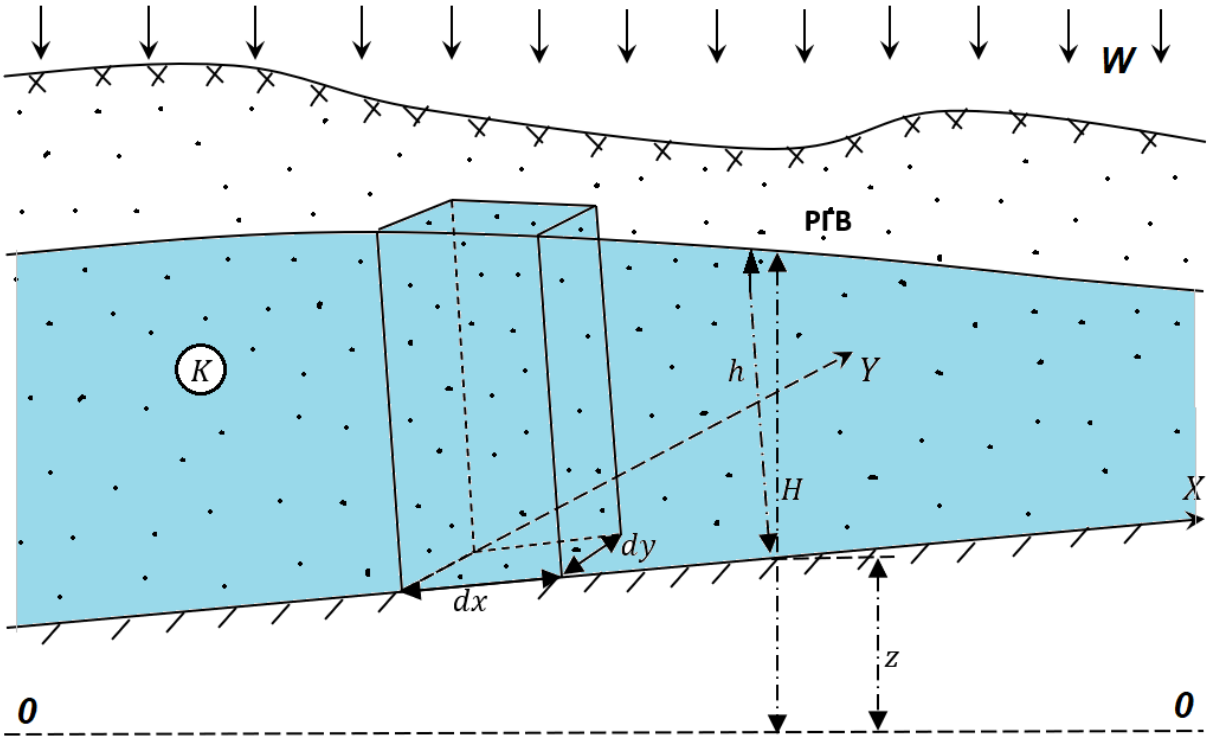


Рис. 6.2 Схема планової фільтрації у безнапірному пласті

Якщо швидкість зниження депресійної поверхні дорівнює $\frac{\partial h}{\partial t}$, то об'єм додаткового живлення на одиницю площі потоку за одиницю часу дорівнює:

$$\varepsilon_Г = -\mu \frac{\partial h}{\partial t}, \qquad (6.14)$$

де $\mu$ - коефіцієнт гравітаційної водовіддачі.

Крім того, у безнапірний пласт зверху надходить рідина за рахунок інфільтрації. Питому величину інфільтраційного живлення на одиницю площі поверхні безнапірного пласта за одиницю часу (так звану *інтенсивність інфільтраційного живлення*) позначимо як $W$. У такому разі рівняння нерозривності при $\gamma = const$ має вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x}(h\, v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(h\, v_y) + \frac{\partial}{\partial t}(h\, n) = \varepsilon_Г + W. \qquad (6.15)$$

Тоді маємо таке рівняння фільтрації:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\, h \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\, h \frac{\partial H}{\partial y}\right) + W = \mu^* \frac{\partial H}{\partial t} + \mu \frac{\partial h}{\partial t}, \qquad (6.16)$$

де $\mu^*$- коефіцієнт пружної водовіддачі безнапірного пласту.

Відомо, що для безнапірної фільтрації є характерним наявність малих нахилів депресійної поверхні, тому можна прийняти, що:

$$\frac{\partial H}{\partial t} \approx \frac{\partial h}{\partial t}. \qquad (6.17)$$

Окрім того, для безнапірних пластів $\mu \rangle\rangle \mu^*$.

Тоді рівняння планової фільтрації у безнапірному пласті матиме вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x}(K_x\, h \frac{\partial H}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(K_y\, h \frac{\partial H}{\partial y}) + W = \mu \frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (6.18)$$

Якщо водоносний пласт є однорідним та ізотропним $(K = const)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h \frac{\partial H}{\partial y}\right) + \frac{W}{K} = \frac{\mu}{K}\frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (6.19)$$

Це рівняння у випадку, що $W = 0$, вперше отримано Ж. Буссінеском, тому має назву *рівняння Буссінеска*.

Зауважимо, що у рівнянні Буссінеска шуканою функцією є $H = f(x, y, t)$. Але коефіцієнти при похідних $(h)$ у лівій частині рівняння залежить від шуканої функції. Такого не було у рівняннях напірної фільтрації, де товщина потоку не залежить від змін гідродинамічного напору. Рівняння такого типу, як рівняння Буссінеска, має назву *нелінійного рівняння*. Нелінійні рівняння складно розв'язувати, тому на практиці рівняння Буссінеска замінюють приблизним лінійним рівнянням (тобто *лінеаризують*).

Існує два *способи лінеаризації* рівняння Буссінеска.

*1-й спосіб* (запропонував Ж. Буссінеск).

Приймається, що $h = h_{сер}$, де $h_{сер}$ - деяка середня товщина потоку.

Тоді лінеаризоване рівняння має вигляд:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{W}{K\, h_{сер}} = \frac{\mu}{K\cdot} \cdot \frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (6.20)$$

*2-й спосіб* (спосіб Багрова - Веригина).

2-й спосіб можна застосувати лише за таких умов:

- водотрив є горизонтальним;
- поверхня порівняння співпадає з водотривом.

При дотриманні згаданих умов можна записати: $H = h$.

Але

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2\left(\frac{h^2}{2}\right)}{\partial x^2}. \qquad (6.21)$$

Тоді лінеаризоване рівняння має вигляд:

$$\frac{\partial^2\left(\frac{h^2}{2}\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{h^2}{2}\right)}{\partial y^2} + \frac{W}{K} = \frac{\mu}{K\cdot h_{сер}}\,\frac{\partial^2\left(\frac{h^2}{2}\right)}{\partial t}. \qquad (6.22)$$

Слід звернути увагу, що тут теж застосовується поняття $h_{сер}$, але відносна похибка в подальших розрахунках від цього менша, ніж у першому способі.

Як бачимо, рівняння є лінійним відносно $\frac{h^2}{2}$. Тому другий спосіб лінеаризації має назву *лінеаризації відносно квадрата шуканої функції*.

В результаті лінеаризації отримують рівняння, які є формально ідентичними рівнянням напірної фільтрації. Наявність інфільтраційного живлення не є принциповим фактом, бо існує аналогія між інфільтраційним живленням та перетіканням у напірному потоці.

В цьому зв’язку, за аналогією з коефіцієнтом п’єзопровідності у напірному потоці, для безнапірного пласту застосовується поняття *коефіцієнта рівнепровідності*:

$$a_p = \frac{T}{\mu} = \frac{K\,h_{\text{сер}}}{\mu}, \qquad (6.23)$$

де $\mu$ – коефіцієнт гравітаційної водовіддачі.

Наприклад, рівняння Буссінеска, яке лінеаризоване за допомогою першого способу, має вигляд:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{W}{T} = \frac{1}{a_p}\frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (6.24)$$

Важливий висновок полягає у тому, що математична еквівалентність кінцевих рівнянь напірної та безнапірної фільтрації дозволяє у подальшому розглядати головним чином рівняння напірної фільтрації, а висновки відносно безнапірної фільтрації робить за аналогією.

**Контрольні запитання**

1. Що таке планова фільтрація?
2. У чому полягає суть передумови Дюпюі?

3. Які водоносні пласти розглядаються в теорії планової фільтрації?
4. Які особливості виникають при отриманні рівняння нерозривності для планової фільтрації в ізольованому напірному пласті?
5. Який вигляд має рівняння нерозривності для жорсткого режиму при плановій фільтрації?
6. Який вигляд має рівняння жорсткого режиму при плановій фільтрації в напірному ізольованому пласті ?
7. Який вигляд має рівняння пружного режиму при плановій фільтрації в напірному ізольованому пласті ?
8. В чому полягають особливості отримання рівняння нерозривності для напірних пластів при наявності перетікання?
9. Як визначається додатковий об'єм рідини, що надходить у виділений елемент за рахунок перетікання?
10. Який вигляд має рівняння нерозривності для напірного потоку при наявності перетікання?
11. Як можна з перейти від рівняння нерозривності до рівняння фільтрації для напірного пласта при наявності перетікання?
12. Що таке «фактор перетікання» та «показник перетікання»?
13. Які особливості слід враховувати при отриманні рівняння планової фільтрації для безнапірного пласта?
14. Як визначається додатковий об'єм рідини, що надходить за рахунок гравітаційної водовіддачі?
15. Який вигляд має рівняння нерозривності для безнапірного пласта?
16. Як перейти від рівняння нерозривності до рівняння фільтрації для умов безнапірного пласта (до рівняння Буссінеска)?
17. У чому полягають особливості рівняння Буссінеска з точки зору його розв’язання?
18. Що таке лінеаризація нелінійного рівняння?
19. Які існують способи (методи) лінеаризації рівняння Буссінеска?
20. Що таке коефіцієнт рівнепровідності ?
21. Який висновок можна зробити, проаналізувавши рівняння планової фільтрації для різних потоків?

# ТЕМА 7. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ГЕОФІЛЬТРАЦІЇ

## Особливості постановки крайових задач геофільтрації

Диференціальні рівняння фільтрації, які розглянуті в темах 5 і 6, відносяться до *диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку (або рівнянь математичної фізики)*.

Рівняння, в яких відсутня похідна за часом $(\frac{\partial H}{\partial t} = 0)$, відносяться до рівнянь *еліптичного типу*, в іншому випадку – до рівнянь *параболічного типу*.

Якщо коефіцієнти в рівнянні залежать лише від координат, рівняння має назву *лінійного*. Якщо коефіцієнти залежать від координат та шуканої функції (гідродинамічного напору або витрати потоку), рівняння має назву *нелінійного*.

Коефіцієнти диференціального рівняння фільтрації являють собою параметри процесу, що вивчається, тобто, являють собою *параметри фільтрації підземних вод*.

Взагалі диференціальне рівняння буде мати нескінченну кількість розв'язків, якщо не задати межі інтегрування. В нашому випадку межі інтегрування - це початковий стан процесу (*початкова умова*) та режим на межах області, для якої цей процес досліджується (*граничні умови*). Початкова та граничні умови разом мають назву *«крайові умови»*, вони визначають конкретний процес фільтрації. Зауважимо, що *для усталеного руху* підземних вод (стаціонарна задача) початкова умова не потрібна, тому *крайові умови представлені лише граничними умовами*.

Сукупність диференціального рівняння та крайових умов створює *крайову задачу*. Крайова задача повинна задовольняти таким вимогам:

1) розв'язок задачі повинен існувати в деякому класі функцій;
2) розв'язок задачі повинен бути єдиним у деякому класі функцій;
3) розв'язок задачі повинен неперервно залежати від даних задачі (коефіцієнтів рівняння, вільних членів у рівнянні, крайових умов).

Розрізняють три групи методів розв'язання крайових задач фільтрації:

1) аналітичні методи;
2) чисельні методи;
3) методи аналогового моделювання.

Оскільки коефіцієнти диференціальних рівнянь, які ми розглядаємо, є параметрами водоносних пластів, такі крайові задачі характеризують саме *процеси геофільтрації*, тобто процеси фільтрації в товщі гірських порід.

## Крайові умови для геофільтраційних потоків

Розглянемо види крайових умов з точки зору розв'язання диференціальних рівнянь геофільтрації.

*Початкові умови* характеризують стан потоку перед початком процесу неусталеної фільтрації, тобто значення шуканої функції (гідродинамічного напору) у початковий (*нульовий*) момент часу. Числові значення початкових умов можна отримати з відповідних карт (або картосхем) ізоліній гідродинамічного напору.

*Граничні умови* характеризують величини гідродинамічних напорів або витрат потоку (шуканих функцій) на всіх межах водоносного пласта (бічних, нижній, верхній та внутрішніх).

У динаміці підземних вод розрізняють *граничні умови чотирьох родів*.

Розглянемо граничні умови на прикладі *бічних меж*.

*Гранична умова I роду*. Спрощений математичний запис:

$$H_{\Gamma} = f(t)\ , \qquad (7.1)$$

де $H_{\Gamma}$ - гідродинамічний напір на межі області фільтрації. Окремий випадок, коли $H_{\Gamma} = const$.

Наприклад, умови I роду мають місце на межах, де водоносний пласт контактує з іншим, більш водозбагаченим пластом або річкою (водоймою). Такі межі мають назву *відкритих*, тому що тут має місце вільний рух води. На бічних межах найчастіше існує умова сталого гідродинамічного напору або цей напір змінюється в часі (рис. 7.1).

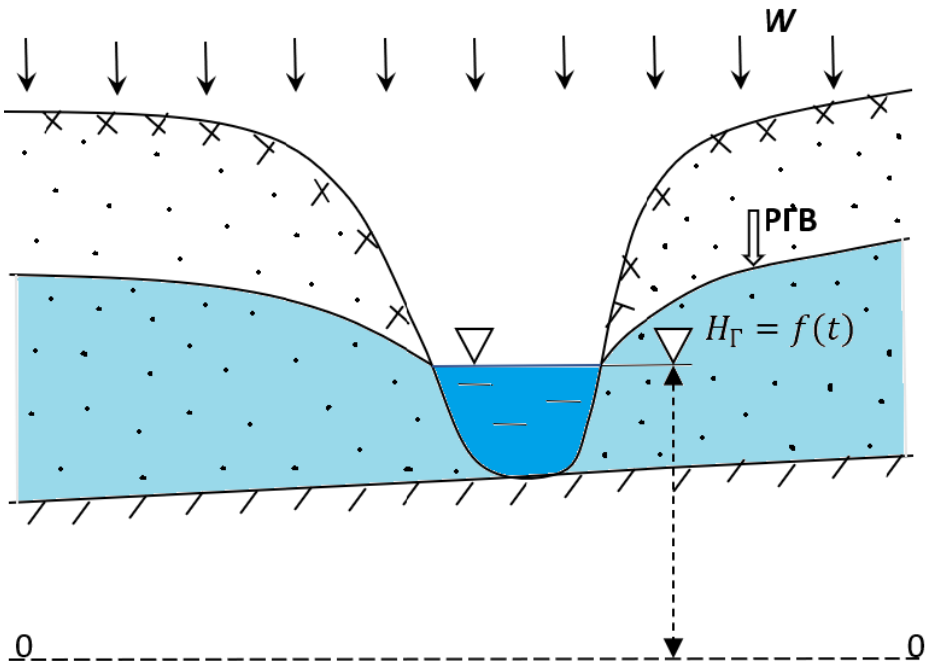


Рис. 7.1 Приклад граничної умови I роду (відкритої межі)

*Гранична умова II роду*. Спрощений математичний запис:

$$q_{\Gamma} = f(t)\ , \qquad (7.2)$$

де $q_{\Gamma}$ - одиничні витрати потоку (витрати на один метр довжини межі) на межі області фільтрації. Окремі випадки, коли $q_{\Gamma} = const;\ q_{\Gamma} = 0.$

Наприклад, на схилі корінного берега, вище долини річки, має місце розвантаження підземних вод у вигляді джерела, тобто існує перелив води в алювіальний водоносний горизонт з гіпсометрично вище розташованого горизонту. Тоді алювіальний водоносний горизонт по лінії межі отримує живлення у вигляді змінних або сталих витрат потоку, отже має місце гранична умова II роду (рис. 7.2). Така межа має назву *напівзакритої*.

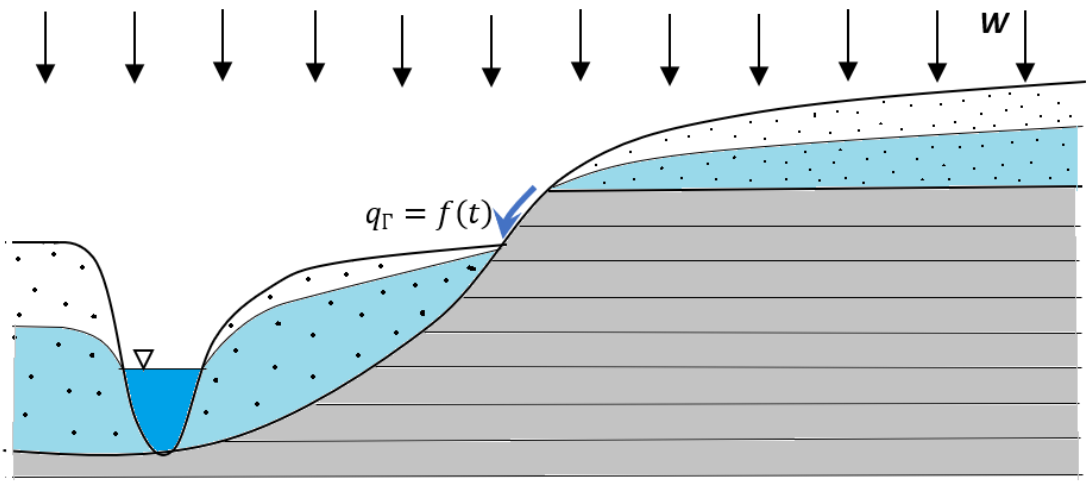


Рис. 7.2 Приклад граничної умови II роду (напівзакритої межі)

Можливий випадок, коли алювіальний водоносний горизонт межує з водотривкими корінними відкладами. Тоді має місце водотривка межа, для якої одиничні бічні витрати дорівнюють нулю (рис. 7.3). Така межа має назву *закритої*.

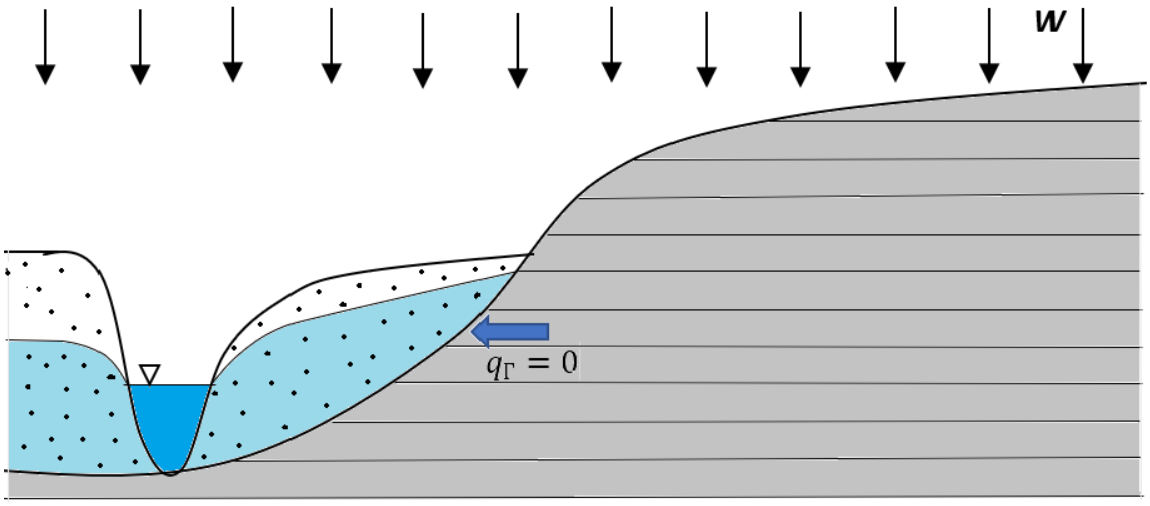


Рис. 7.3 Приклад граничної умови II роду (закритої межі)

*Гранична умова III роду*. Спрощений математичний запис:

$$q_\Gamma = f(H_P - H_\Gamma)\,, \qquad (7.3)$$

де $H_\Gamma$ - гідродинамічний напір на межі області фільтрації; $H_P$ - гідродинамічний напір на зовнішній межі (річка, інший водоносний горизонт).

Наприклад, водоносний горизонт контактує з річкою, але русло річки закольматовано. Це викликає додатковий опір рухові води (рис. 7.4). Така межа має назву *напіввідкритої*.

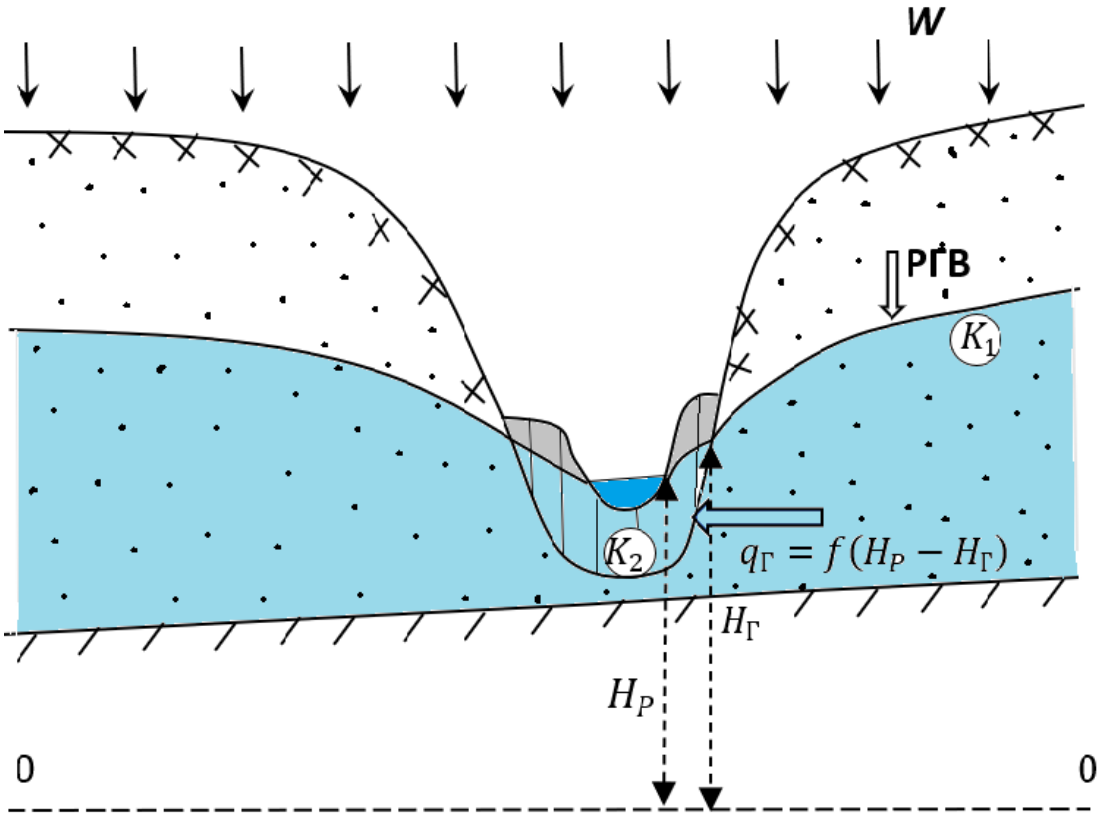


Рис. 7.4 Приклад граничної умови III роду (напіввідкритої межі), $K_1 \rangle K_2$

Тоді одиничні витрати потоку скрізь закольматований шар (що має коефіцієнт фільтрації $K_2$) залежать від різниці гідродинамічних напорів на межі області фільтрації та в річці $(H_P - H_\Gamma)$.

*Гранична умова IV роду*. Спрощений математичний запис:

$$\begin{cases} H_{\Gamma 1} = H_{\Gamma 2}; \\ q_{\Gamma 1} = q_{\Gamma 2}; \end{cases} \qquad (7.4)$$

де $H_{\Gamma 1}$ - гідродинамічний напір на межі в шарі 1; $H_{\Gamma 2}$ - гідродинамічний напір на межі в шарі 2, який контактує з шаром 1; $q_{\Gamma 1}$ - одиничні витрати потоку на межі в шарі 1; $q_{\Gamma 2}$ - одиничні витрати потоку на межі в шарі 2, який контактує з шаром 1.

Така умова має місце на контакті двох різних за водопроникністю шарів, з урахуванням неперервності течії (рис. 7.5).

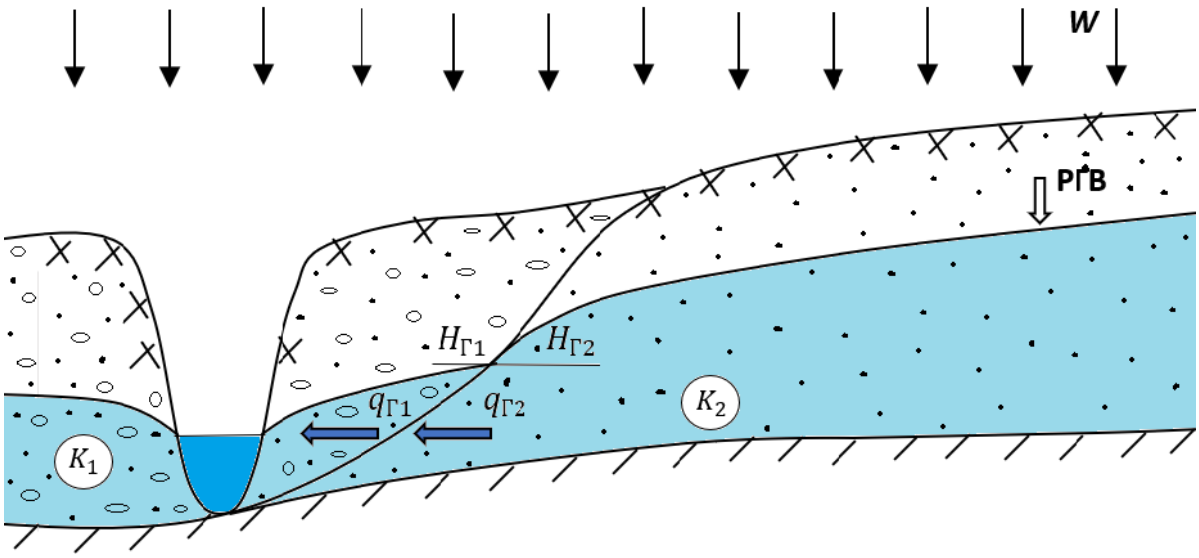


Рис. 7.5 Приклад граничної умови IV роду

Перегин ліній току (поверхні гідродинамічного напору) на межі двох шарів залежить від співвідношення коефіцієнтів фільтрації контактуючих шарів ($K_1$ та $K_2$), див. рис. 7.6.

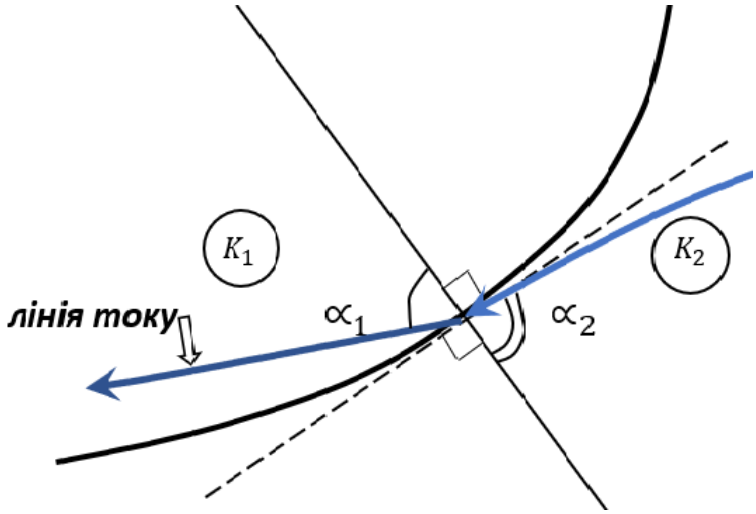


Рис. 7.6 Ілюстрація до перегину ліній току на межі двох шарів, $\frac{tg\propto_1}{tg\propto_2} = \frac{K_1}{K_2}$

Розглянуті приклади граничних умов стосуються бічних меж.

*На нижній межі* напірного або безнапірного потоку може мати місце

пласта). Живлення буває додатним (інфільтрація) або від'ємним (випаровування). Тому можна стверджувати *гранична умова II роду* $(q_\Gamma = 0)$, якщо ложе потоку представлено водотривам. Якщо ложе представлено слабо проникним шаром, і має місце перетікання з розташованого нижче напірного пласта (або в пласт), то має місце *гранична умова III роду*.

*На верхній межі напірних потоків* граничні умови аналогічні попереднім (*як для нижньої межі*). На верхній межі безнапірних потоків (вільна поверхня ґрунтових вод) граничні умови визначаються величиною інтенсивності живлення по площі (витрати на одиницю площі водоносного, що *на верхній межі безнапірного* потоку має місце *гранична умова II роду*.

*На внутрішніх межах* мають місце *граничні умови I роду* (наприклад, рівень води в горизонтальній дрені; гідродинамічний напір у свердловині) *або II роду* (наприклад, дебіт свердловини).

## Аналітичні методи розв'язання крайових задач геофільтрації

Аналітичні методи розв'язання крайових задач геофільтрації поділяють на групу гідромеханічних (точних) методів та гідравлічні (наближені) методи.

*Гідромеханічні методи* базуються на точному розв'язанні рівнянь геофільтрації. Вони застосовуються при розв'язанні рівнянь, що описують процеси усталеної фільтрації. При цьому зазвичай використовуються:

- методи аналітичної теорії звичайних диференціальних рівнянь,
- метод Фур'є,
- метод функції комплексної швидкості,
- метод конформних відображень,

- метод суперпозиції,
- метод джерел та стоків,
- метод інтегральних перетворень.

Наприклад, метод суперпозиції (накладання течій) базується на тому, що для будь-якого лінійного диференціального рівняння можна отримати будь-яку кількість окремих розв’язків, а алгебраїчна сума цих розв’язків дає новий окремий розв’язок.

Гідравлічні методи покладені в основу так званої гідравлічної теорії фільтрації і широко застосовуються при прикладних гідродинамічних розрахунках процесів неусталеної фільтрації (фільтрація поблизу гідротехнічних споруд, вертикальних водозаборів тощо).

**Контрольні запитання**

1. Як з математичної точки зору характеризуються рівняння фільтрації?
2. Які рівняння називаються лінійними та нелінійними?
3. Що означає поняття «параметр» в рівняннях фільтрації підземних вод?
4. Що являють собою коефіцієнти рівнянь фільтрації з точки зору математичної моделі?
5. Які існують групи методів для розв’язання диференціальних рівнянь фільтрації?
6. Що необхідно задати для розв’язання диференціального рівняння, що описує конкретний процес фільтрації?
7. Що практично означають поняття «початкові умови» та «граничні умови» фільтраційних потоків?
8. Що таке «крайова задача» для процесу фільтрації?
9. Що означає поняття «гранична умова I роду»?
10. Що означає поняття «гранична умова II роду»?
11. Що означає поняття «гранична умова III роду»?
12. Що означає поняття «граничні умови IV роду»?
13. Які граничні умови можуть існувати на нижній межі потоків?
14. Які граничні умови можуть існувати на верхній межі потоків?
15. Які граничні умови можуть існувати на внутрішніх межах потоків?

# ТЕМА 8. АНАЛІТИЧНІ РОЗРАХУНКИ УСТАЛЕНИХ ОДНОМІРНИХ ПОТОКІВ ПІДЗЕМНИХ ВОД

Планова фільтрація може відбуватися в умовах, коли ширина окремих стрічок току в напрямку потоку змінюється несуттєво, а лінії току є приблизно паралельними. Такі умови виникають на вододілах між двома паралельними долинами річок (пласт-смуга); поблизу річок та водосховищ, якщо береги прямолінійні, тощо. Для таких умов потоки можна розглядати як *одномірні*. При розрахунках таких потоків приймається, що ширина потоку дорівнює 1 м. Витрата потоку, ширина якого дорівнює 1 м, має назву *питомої витрати* і позначається як $q$. Розмірність питомої витрати: $\text{м}^3/\text{доб} * \text{м} = \text{м}^2/\text{доб}$.

## Основні розрахункові схеми усталених одномірних потоків

У природних (непорушених людиною) умовах неусталена фільтрація недостатньо поширена, за винятком випадків, коли на межах потоків граничні умови різко змінюються в часі (наприклад, зміна рівня води в річці в період паводка).

Таким чином, за винятком особливих випадків, у природних умовах можна прийняти таке припущення: потоки є приблизно усталеними, а розрахунки таких потоків будуть відповідати практичним вимогам. Тому розрахунки усталених одномірних потоків мають велике практичне значення.

При розгляді усталених одномірних потоків розрізняють три основні схеми будови таких потоків, або *три основні розрахункові схеми*.

1. *Потік зі сталою водопровідністю* (рис. 8.1).

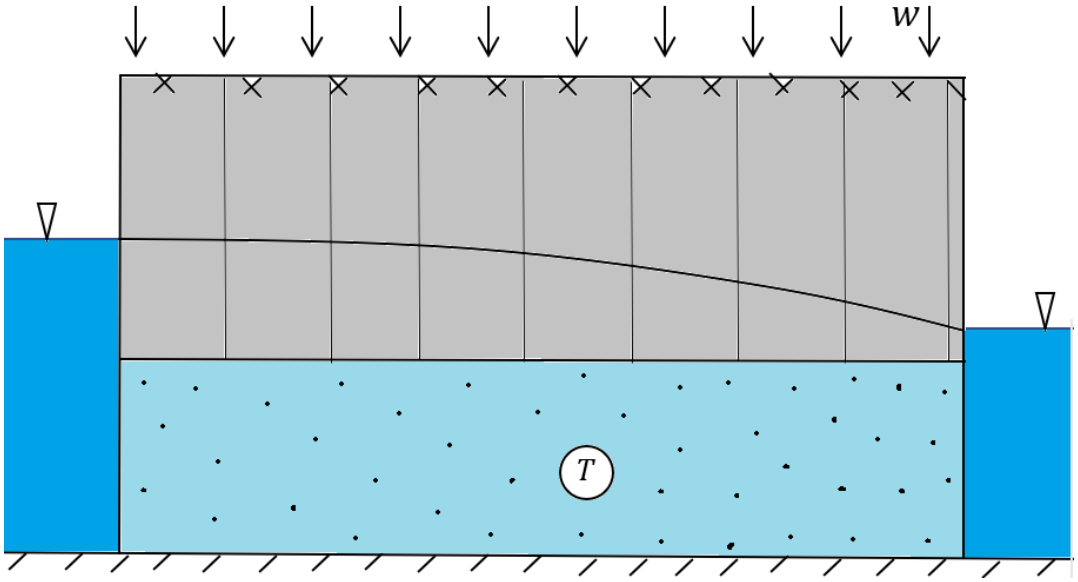


Рис. 8.1 Потік зі сталою водопровідністю

Схема є найбільш характерною для напірного потоку. Коефіцієнт водопровідності такого потоку $T$ є сталою величиною, він не залежить від зміни гідродинамічного напору.

2. *Однорідний безнапірний потік* (рис. 8.2).

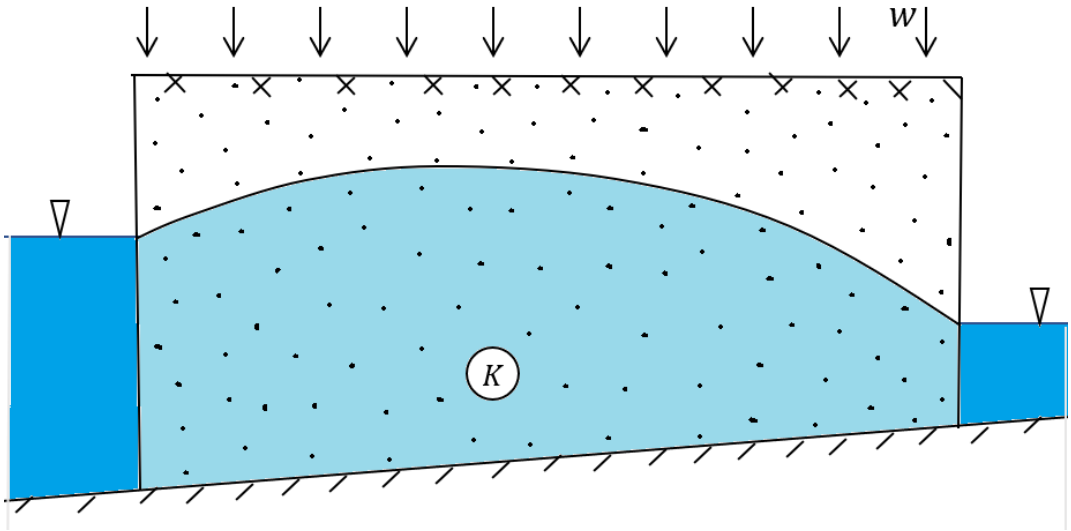


Рис. 8.2 Однорідний безнапірний потік

Коефіцієнт водопровідності такого потоку залежить від його товщини (відповідно, гідродинамічного напору), оскільки $T = K\ h$.

Така схема за умови, що *водотрив розташований горизонтально*, була вперше запропонована Дюпюі, тому вона отримала власну назву - *схема Дюпюі*.

3. *Однорідно-шаруватий безнапірний потік* (рис. 8.3).

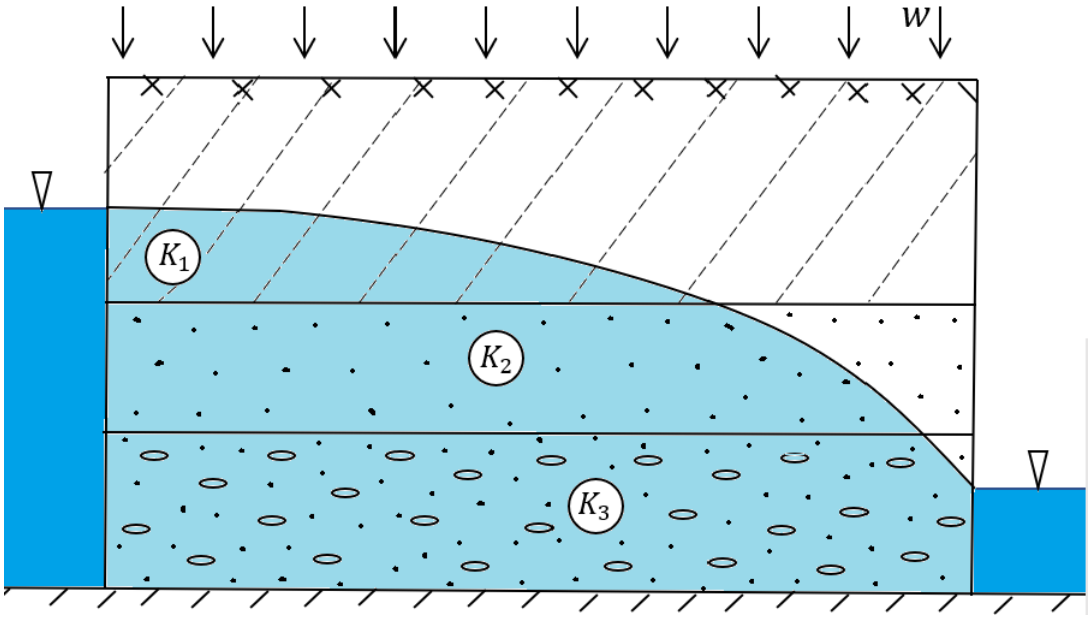


Рис. 8.3 Однорідно-шаруватий безнапірний потік

За таких умов коефіцієнт водопровідності потоку залежить від шаруватої будови пласта. Така схема вперше була розглянута М. Гіринським, тому вона має власну назву - *схема Гіринського*.

Найчастіше на практиці застосовують першу розрахункову схему, тобто, схему потоку зі сталою водопровідністю. Обґрунтування такого підходу (пріоритету першої розрахункової схеми) свого часу виконано В. Шестаковим. Застосування схеми потоку зі сталою водопровідністю дозволяє *уніфікувати розрахункові залежності для напірних та безнапірних потоків*.

Для схеми напірного потоку зі сталою водопровідністю застосовують рівняння:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{W}{T} = 0 \,. \qquad (8.1)$$

Якщо такий потік є одномірним, маємо:

$$\frac{d^2 H}{dx^2} + \frac{W}{T} = 0 \,. \qquad (8.2)$$

Для схеми Дюпюі можна записати рівняння (див.тему 6, лінеарізація за Багровим-Веригіним):

$$\frac{\partial^2\left(\frac{h^2}{2}\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{h^2}{2}\right)}{\partial y^2} + \frac{W}{K} = 0 \,. \qquad (8.3)$$

Якщо такий потік є одномірним, маємо:

$$\frac{d^2\left(\frac{h^2}{2}\right)}{dx^2} + \frac{W}{K} = 0 \,. \qquad (8.4)$$

Для схеми Гіринського відповідне рівняння можна отримати, якщо привести пласт до однорідного за допомогою так званої *функції Гіринського*. Функція Гіринського пов`язана з гідродинамічним напором залежністю:

$$dG = T\,dh \,, \qquad (8.5)$$

де $h$ - гідродинамічний напір, який відповідає товщині пласта, якщо водотрив розташований горизонтально.

Виходячи з цього, питомі витрати потоку в напрямках *0 - X* та *0 - Y* складають:

$$q_x = -T\ \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial G}{\partial x}, \qquad (8.6)$$

$$q_y = -T\ \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{\partial G}{\partial y}. \qquad (8.7)$$

Рівняння фільтрації має вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x}(T\frac{\partial H}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(T\frac{\partial H}{\partial y}) + W = 0\ . \qquad (8.8)$$

Якщо $H = h$ :

$$\frac{\partial}{\partial x}(T\frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(T\frac{\partial h}{\partial y}) + W = 0\ , \qquad (8.9)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + w = 0\ . \qquad (8.10)$$

Для одномірного потоку:

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + w = 0\ . \qquad (8.11)$$

Теоретично функція Гіринського визначається за допомогою виразу:

$$G = \int_0^h K(z)\ (h - z)\ dz\ , \qquad (8.12)$$

де $z$ - вертикальна координата.

Практичне визначення функції Гіринського в окремому перетині виконується за формулою:

$$G = \sum_{i=1}^{n} K_i\ m_i\ (h_\Pi - z_i)\ , \qquad (8.13)$$

де $K_i$ - коефіцієнт фільтрації *i*-того шару; $m_i$ - товщина *i*-того шару; $h_\Pi$ - повна потужність потоку в розрахунковому перетині; $z_i$ - відстань від середини *i*-того шару до горизонтального водотриву, $n$ – кількість шарів у розрахунковому перетині.

За даними М.Веригіна, функцію Гіринського можна застосовувати для шаруватих пластів, якщо коефіцієнти фільтрації окремих шарів відрізняються не більше, ніж у 200 разів.

Якщо співставити диференціальні рівняння одномірних потоків для схем потоків зі сталою водопровідністю, Дюпюі та Гіринського, можна зробити висновок: *рівняння є однотипними за формою.*

Базуючись на схемі потоку зі сталою водопровідністю, можна сформулювати правила переходу до двох інших схем.

*Правило переходу від схеми потоку зі сталою водопровідністю до схеми Дюпюі:*

$$\boxed{\begin{aligned} T &\to K \\ H &\to \frac{h^2}{2} \end{aligned}}$$

*Правило переходу від схеми потоку зі сталою водопровідністю до схеми Гіринського:*

$$\boxed{\begin{aligned} T &\to 1 \\ H &\to G \end{aligned}}$$

Тому в подальшому розглянемо лише розв`язання рівняння фільтрації одномірного потоку зі сталою водопровідністю. Розв`язки для схем Дюпюі та Гіринського можна отримати за допомогою наведених вище правил переходу.

## Розрахунки усталених одномірних потоків підземних вод

Для схеми потоку зі сталою водопровідністю напишемо рівняння (8.2) у такому вигляді:

$$\frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{W}{T}\,. \qquad (8.14)$$

Проінтегруємо рівняння (8.14). Після першого інтегрування маємо:

$$\frac{dH}{dx} = -\frac{w}{T}\,x + C_1\,. \qquad (8.15)$$

Після другого інтегрування маємо:

$$H = -\frac{w}{2T}x^2 + C_1\,x + C_2. \qquad (8.16)$$

Тут $C_1$ і $C_2$ - сталі інтегрування, які визначаються граничними умовами задачі.

Для визначення $C_1$ і $C_2$ розглянемо схему на рис. 8.4.

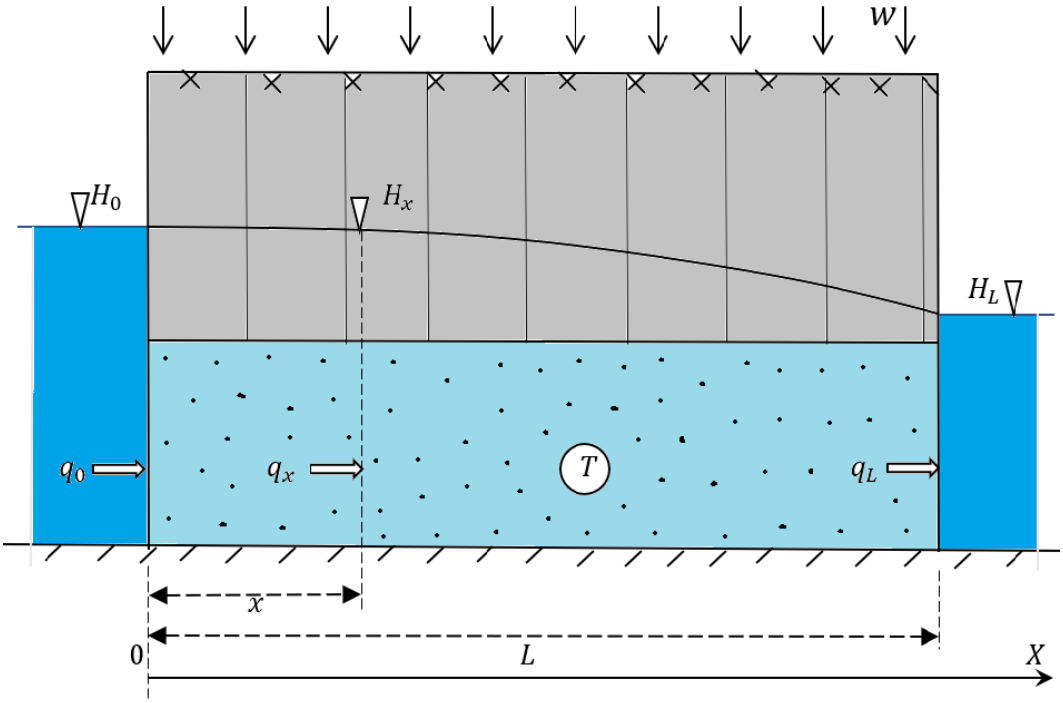


Рис. 8.4 Розрахункова схема потоку зі сталою водопровідністю

Згідно схеми, при $x = 0$ $H = H_0$, а при $x = L$ $H = H_L$.
Тоді з попереднього виразу маємо:

$$H_0 = C_2\,, \qquad (8.17)$$

$$H_L = -\frac{wL^2}{2T} + C_1\,L + H_0\,. \qquad (8.18)$$

Звідси маємо вирази для $C_1$ і $C_2$ :

$$C_1 = \frac{H_L - H_0}{L} + \frac{w\,L^2}{2\,T}, \qquad (8.19)$$

$$C_2 = H_0. \qquad (8.20)$$

Тоді формула для розрахунку гідродинамічного напору у визначеному перетині $H_x$ має вигляд:

$$H_x = H_0 + \frac{H_L - H_0}{L}\, x + \frac{w\, x}{2 \cdot T}\, (L - x)\,. \qquad (8.21)$$

Питома витрата потоку $q_x$ у визначеному перетині розраховується за формулою:

$$q_x = -T\, \frac{dH}{dx} = T\, \frac{H_0 - H_L}{L} - w\, (0{,}5\, L - x)\,. \qquad (8.22)$$

Для питомих витрат на межах потоків $q_0$ і $q_L$ маємо:

$$q_0 = T\, \frac{H_0 - H_L}{L} - \frac{w\, L}{2}; \qquad (8.23)$$

$$q_L = T\, \frac{H_0 - H_L}{L} + \frac{w\, L}{2}. \qquad (8.24)$$

Якщо живлення по площі відсутнє $(w = 0)$, відповідні формули мають вигляд:

$$H_x = H_0 + \frac{H_L - H_0}{L}\, x; \qquad (8.25)$$

$$q_x = T\, \frac{H_0 - H_L}{L}. \qquad (8.26)$$

Слід звернути увагу, що в такому випадку $q_x = q_0 = q_L = const$ .

Базуючись на отриманих формулах, легко отримати розв`язки для шматково-однорідних потоків, потоків із шматково-сталим живленням по площі, визначити положення підземної вододільної точки (якщо вона виникає). Для безнапірних одномірних потоків за умов відсутності живлення по площі та залягання водотриву з ухилом розв`язок отриманий М. Павловським та Г. Каменським.

**Урахування в розрахунках опору ложа водотоків та водоймищ**

У деяких випадках, коли на межах потоків русло річки не є досконалим (не прорізує всю товщину потоку) або розташоване в слабопроникному шарі (див. рис. 8.5, 8.6), виникає порушення передумови Дюпюі, і такі потоки не можна розглядати як одномірні.

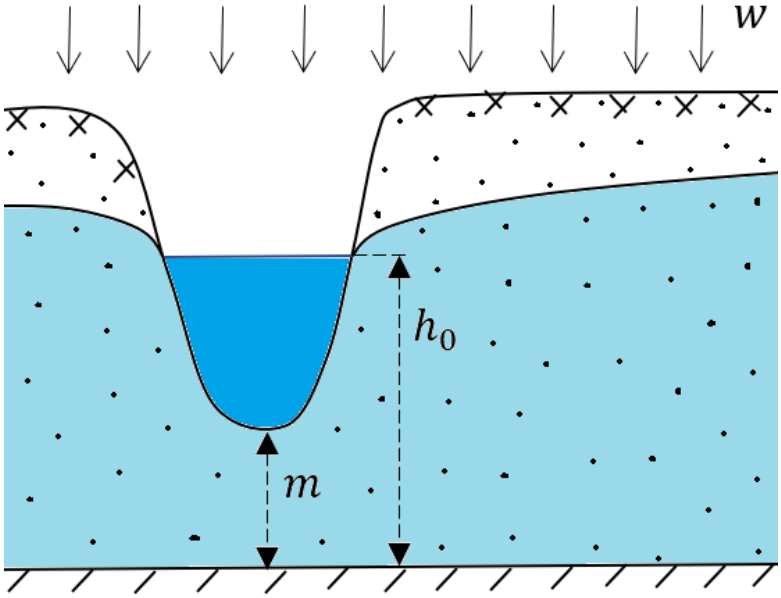


Рис. 8.5 Русло річки не прорізує всю потужність потоку

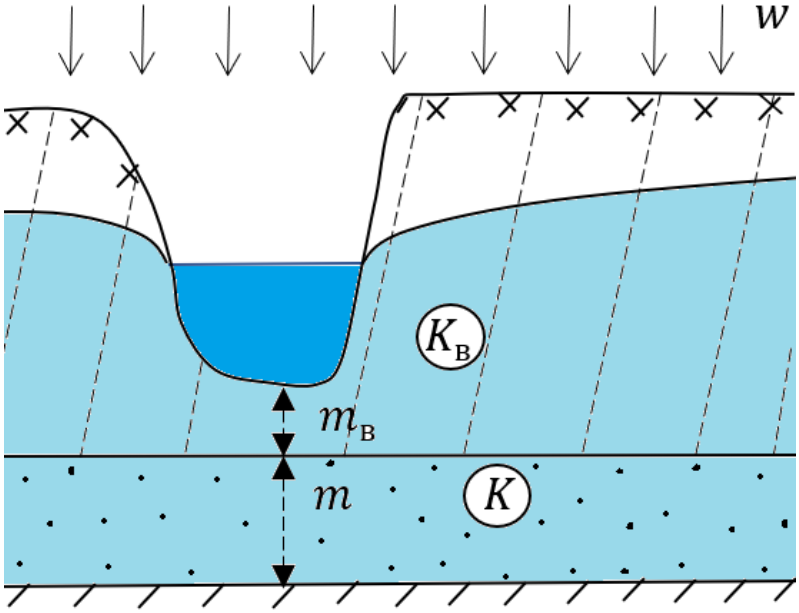


Рис. 8.6 Русло річки розташоване в слабопроникному шарі

Для таких випадків був запропонований *метод фільтраційних опорів.* Основне положення методу: поблизу зон різкої деформації ліній течії (поблизу таких меж) виділяють локальні опори, які не залежать від умов формування всього потоку.

Як поправку найчастіше застосовують величину *еквівалентного опору ложа річки* $\Delta L$ , яку додають до відстані $L$ у розрахункових формулах одномірних потоків (замість $L$ застосовують $L = L + \Delta L$). При цьому межа контуру річки ніби відсувається на величину $\Delta L$.

Для схеми на рис. 8.5:

$$\Delta L = 0{,}45\ m\ . \qquad (8.27)$$

Для схеми на рис. 8.6:

$$\Delta L = \sqrt{\frac{m_{\text{в}}\ K\ m}{K_{\text{в}}}}\ . \qquad (8.28)$$

**Контрольні запитання**

1. В яких випадках допускається схематизація, що дозволяє розглядати потоки як одномірні?
2. Які основні розрахункові схеми усталених одномірних потоків існують?
3. Який вигляд має диференціальне рівняння фільтрації для одномірного напірного потоку із сталою водопровідністю?
4. Який вигляд має диференціальне рівняння фільтрації для одномірного однорідного безнапірного потоку на горизонтальному водотриві (для схеми Дюпюі)?
5. Який вигляд має диференціальне рівняння фільтрації для одномірного горизонтального однорідно-шаруватого потоку (для схеми Гіринського)?
6. Для чого використовується функція Гіринського?
7. Як визначається функція Гіринського?
8. Який висновок можна зробити, порівнявши диференційні рівняння для основних розрахункових схем усталених одномірних потоків?
9. Які існують правила (умови) переходу від схеми напірного потоку із сталою водопровідністю до схем Дюпюі та Гіринського?
10. Яким шляхом виконується розв'язання диференційного рівняння фільтрації для одномірного потоку із сталою водопровідністю?
11. Як визначається гідродинамічний напір в заданій точці одномірного потоку із сталою водопровідністю?
12. Як визначається питома витрата потоку в заданому перерізі та на межах одномірного потоку із сталою водопровідністю?
13. Як визначається гідродинамічний напір в заданій точці одномірного безнапірного однорідного потоку на горизонтальному водотриві?
14. Як визначається питома витрата потоку в заданому перерізі та на межах одномірного безнапірного однорідного потоку на горизонтальному водотриві?
15. В чому полягає суть методу фільтраційних опорів?

# ТЕМА 9. ФІЛЬТРАЦІЯ В ЗОНІ ВПЛИВУ ГІДРОТЕХНІЧНИХ СПОРУД

## Загальна характеристика фільтрації в зоні впливу гідротехнічних споруд

Спорудження та експлуатація гідротехнічної споруди (водосховища, каналу, греблі тощо) викликає зміни в природній гідродинамічній обстановці.

При заповненні водою гідротехнічної споруди, перш за все, насичується водою зона аерації в межах ложа споруди. Потім починається насичення берегів. У водосховищах зразу має місце насичення берегів (рис. 9.1). Втрати води, які при цьому виникають, мають назву *тимчасових втрат.* Такі втрати мають місце завжди.

Підняття поверхні ґрунтових вод, яке має місце при насиченні берегів водосховищ та каналів, має назву *підпору підземних вод.* Підпір розвивається в часі дуже повільно. Поступово він розповсюджується в напрямку від водосховища. Через деякий час настане рівновага в нових гідродинамічних умовах. Підпір, який буде мати місце в таких умовах, має назву *усталеного (граничного) підпору.*

Умови формування підпору залежать від співвідношення рівня води в гідротехнічній споруді та рівня ґрунтових вод поблизу споруди в природних умовах. При цьому завжди виникають тимчасові втрати в береги. *Постійні втрати* (втрати за умов усталеного підпору) *в береги водосховища або каналу* виникають не завжди.

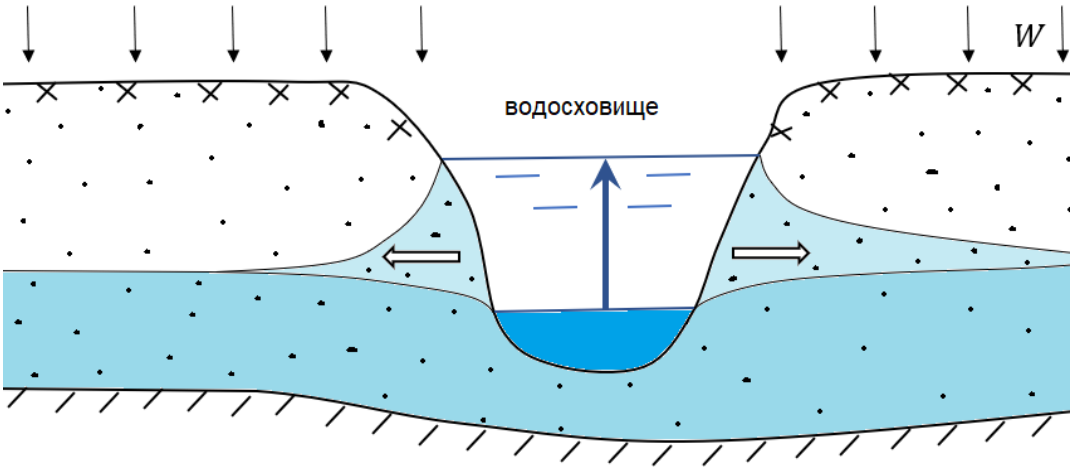


Рис. 9.1 Приклад насичення берегів водосховища

Постійні втрати на фільтрацію мають місце також поблизу гребель. Вони складаються з *втрат через тіло греблі, під фундаментом греблі* (рис. 9.2) та *поза плечима греблі* (рис. 9.3).

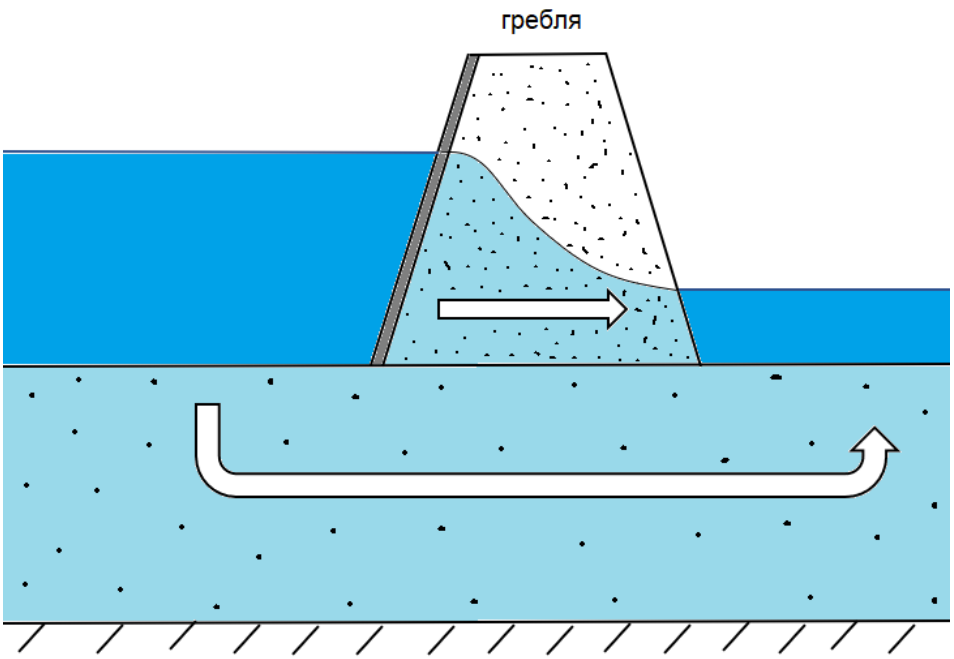


Рис. 9.2 Приклад фільтрації через тіло греблі та під її фундаментом

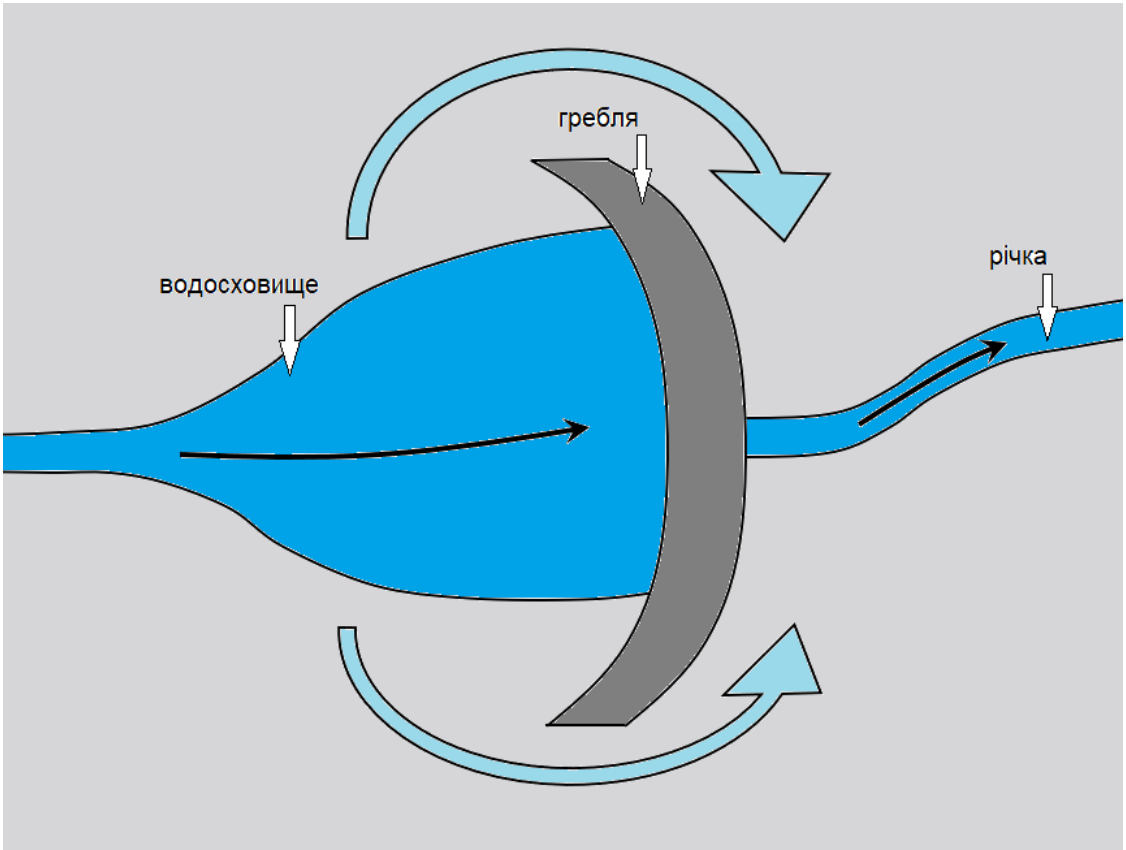


Рис. 9.3 Приклад фільтрації поза плечима греблі

**Визначення усталеного підпору підземних вод**

Оцінка усталеного підпору може бути виконана за допомогою теорії усталеної одномірної фільтрації (див. тему 8). Але для цього необхідно знати фільтраційні параметри.

Якщо фільтраційні параметри невідомі, але відомі положення поверхні потоку ґрунтових вод (до підпору) та запроектований рівень води в гідротехнічній споруді, можна визначити усталений підпір для схеми Дюпюі таким чином (див. рис. 9.4).

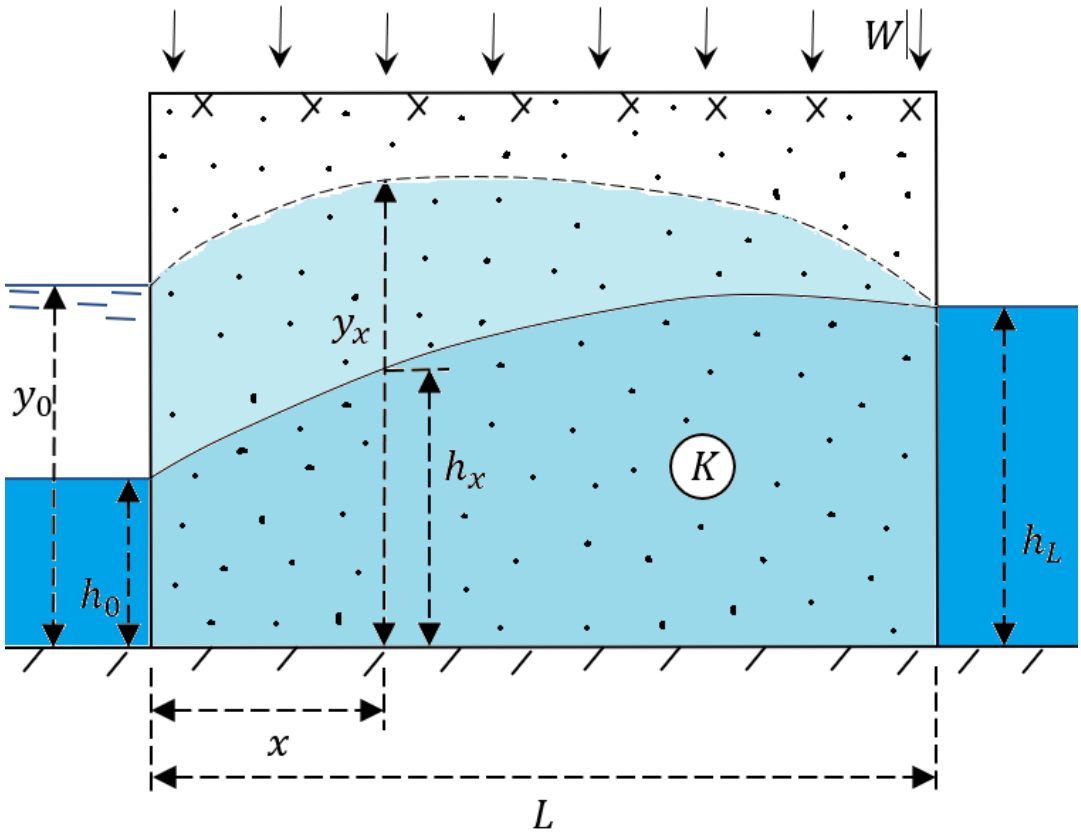


Рис. 9.4 До визначення усталеного підпору для схеми Дюпюі

Товщина природного потоку $h_x$ визначається за залежністю (див. тему 8):

$$h^2{}_x = h_0^2 + \frac{h_L^2 - h_0^2}{L}\, x + \frac{W\, x}{K}\,(L - x). \qquad (9.1)$$

Товщина потоку $y_x$ за умови усталеного підпору визначається за залежністю:

$$y^2{}_x = y_0^2 + \frac{h_L^2 - y_0^2}{L}\, x + \frac{W\, x}{K}\,(L - x). \qquad (9.2)$$

Шляхом віднімання одного рівняння від другого маємо:

$$y_x^2 = h_x^2 + \left(y_0^2 - h_0^2\right) \frac{L-x}{L}. \qquad (9.3)$$

Таким самим чином можна отримати рівняння для визначення усталеного підпору у випадку, коли лінія берега гідротехнічної споруди зміщується, а також для схеми потоку зі сталою водопровідністю та для схеми Гіринського.

**Визначення неусталеного підпору підземних вод**

Розглянемо визначення неусталеного підпору для схеми одномірного потоку зі сталою водопровідністю. Рівняння фільтрації в такому випадку має вигляд (див. тему 6):

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{W}{T} = \frac{1}{a_p} \frac{\partial H}{\partial t}, \qquad (9.4)$$

$$a_p \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{W}{\mu} = \frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (9.5)$$

Для природного потоку (до підпору, коли $H = H_{\text{пр}}$) можна записати:

$$a_p \frac{\partial^2 H_{\text{пр}}}{\partial x^2} + \frac{W}{\mu} = \frac{\partial H_{\text{пр}}}{\partial t}. \qquad (9.6)$$

Для потоку в умовах підпору (коли $H = H_{\text{під}}$):

$$a_p \frac{\partial^2 H_{\text{під}}}{\partial x^2} + \frac{W}{\mu} = \frac{\partial H_{\text{під}}}{\partial t}. \qquad (9.7)$$

Якщо прийняти, що інтенсивність живлення по площі не змінюється ($W = const$) та відняти з рівняння (9.7) рівняння (9.6), , будемо мати:

$$a_p \frac{\partial^2 \Delta H}{\partial x^2} = \frac{\partial \Delta H}{\partial t}, \qquad (9.8)$$

де $\Delta H = H_{\text{під}} - H_{\text{пр}}$.

Будемо розглядати $\Delta H$ як $H_{(x,t)}$, тобто як зміну напору в точці з координатою $x$ за час підпору $t$.

При миттєвій зміні напору на межі області фільтрації, тобто за умови $x = 0$, запишемо:

$$\Delta H_{(x,t)} = \Delta H^0. \qquad (9.9)$$

Тоді загальний вигляд розв`язку рівняння (9.8), згідно з В. Шестаковим, буде таким:

$$\Delta H_{(x,t)} = \Delta H^0 \, F(x,t), \qquad (9.10)$$

де $F(x,t)$ - функція, що залежить від типу потоку та від умов на його межах.

Значення $F(x,t)$ визначаються за допомогою спеціальних таблиць або графіків.

Наприклад, для напівобмеженого потоку зі сталою водопровідністю (див. рис. 9.5):

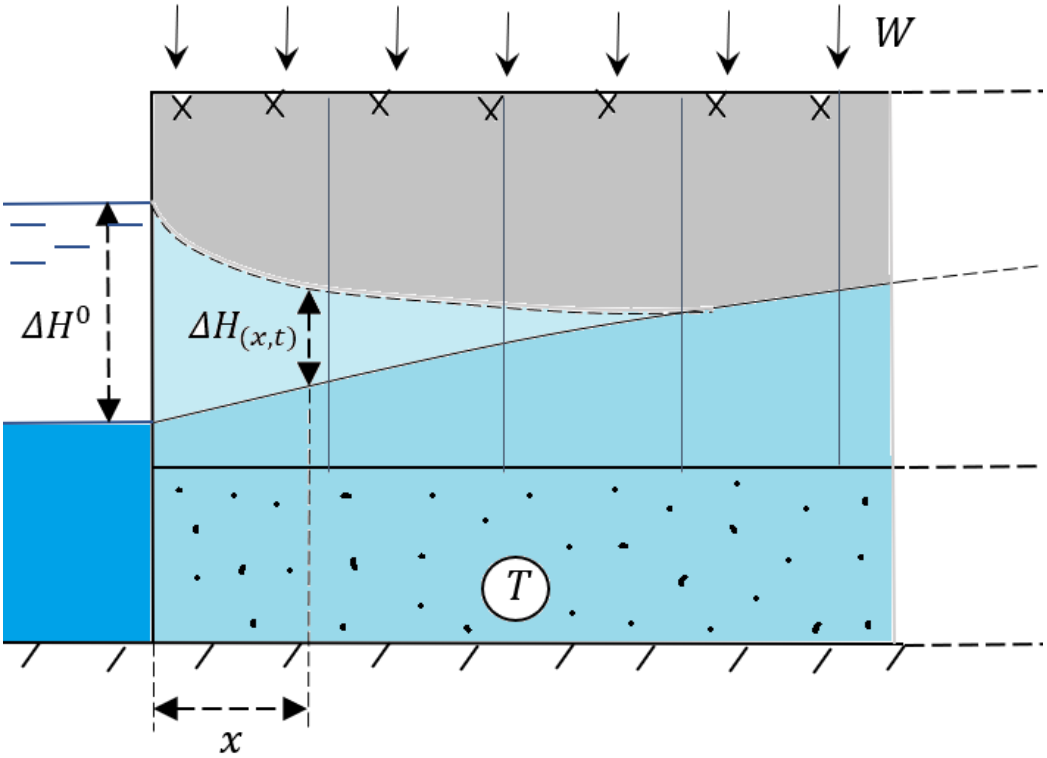


Рис. 9.5 Схема до визначення неусталеного підпору

$$F(x,t) = 1 - erf(\lambda) = erfc(\lambda)\,, \qquad (9.11)$$

$$\lambda = \frac{x}{2\sqrt{a_p\, t}}. \qquad (9.12)$$

Тут $erf(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-\lambda^2} d\lambda$- інтеграл імовірності Гауса (*error-функція*).

Якщо зміна напору на межі області фільтрації відбувається повільно, графік його зміни замінюють ступінчастим (див. рис. 9.6) та отримують розв`язок на основі формули (9.10) для миттєвої зміни рівня) за допомогою методу суперпозиції.

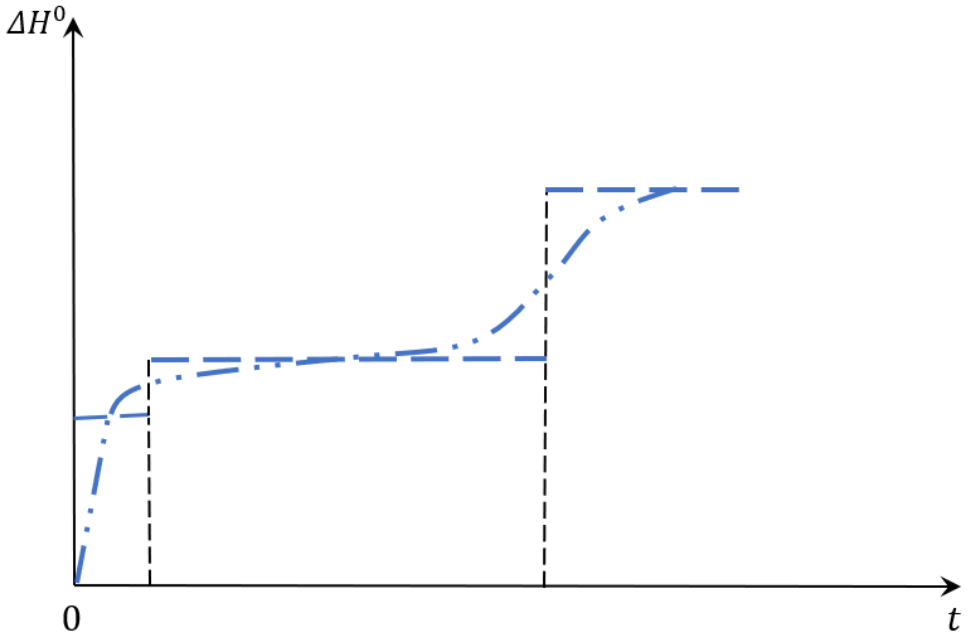


Рис. 9.6 Приклад заміни графіку зміни напору на межі області фільтрації ступінчастим графіком

Для схеми Дюпюі відповідний розв’язок можна отримати за допомогою правила переходу $H \rightarrow \frac{h^2}{2}$ (див. тему 8). При цьому обов’язково слід звернути увагу на таку особливість.

У загальному випадку:

$$\Delta H_{(x,t)} = H_{\text{під}(x,t)} - H_{\text{пр}(x,t)}. \qquad (9.13)$$

Але при застосуванні схеми Дюпюі залежність (9.10) набуває вигляду:

$$\frac{h^2_{\text{під}(x,t)}}{2} - \frac{h^2_{\text{пр}(x,t)}}{2} = \left[\frac{h^2_{\text{під}(0,t)}}{2} - \frac{h^2_{\text{пр}(0,t)}}{2}\right] F(x,t)\ , \qquad (9.14)$$

$$h^2_{\text{під}(x,t)} - h^2_{\text{пр}(x,t)} = \left[h^2_{\text{під}(0,t)} - h^2_{\text{пр}(0,t)}\right] F(x,t)\ , \quad (9.15)$$

$$h^2_{\text{під}(x,t)} = h^2_{\text{пр}(x,t)} + \left[h^2_{\text{під}(0,t)} - h^2_{\text{пр}(0,t)}\right] F(x,t)\ . \quad (9.16)$$

Слід звернути увагу, що в наведених вище залежностях використовується коефіцієнт рівнепровідності $a_p = \frac{K\,h_{\text{сер}}}{\mu}$ (див. тему 6). Для розрахунку середньої товщини потоку $h_{\text{сер}}$ М. Веригіним запропонував відповідні залежності.

Слід зазначити, що в реальних умовах горизонт води в гідротехнічних спорудах, водоймах, водотоках періодично змінюється (наприклад, при повені). Вплив таких періодичних коливань води розповсюджується в напрямку від берега, але на обмежену відстань $L_{\text{в}}$. Ця відстань визначається за допомогою *формули Асатура:*

$$L_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2\,\pi\,K\,h_{\text{сер}}\,t_{\text{нк}}}{\mu}}\,, \qquad (9.17)$$

де $t_{\text{нк}}$ - найбільший напівперіод коливань горизонту води в гідротехнічній споруді, водоймі, водотоці.

**Врахування опору ложа водоймищ та водотоків при неусталеній фільтрації**

Врахування опору ложа за умов усталеної фільтрації, за рекомендацією В. Шестакова, виконується за допомогою додаткового опору $\Delta L$ (див. тему 8). Але для неусталеної фільтрації додатковий опір залежить від часу, тобто замість $\Delta L$ використовується $\Delta L_t$ .

Розв'язок для визначення $\Delta L_t$ наданий В. Шестаковим, він має такий вигляд:

$$\Delta L_t = \Delta L\, f(\theta), \qquad (9.18)$$

$$\theta = \frac{\sqrt{a_p}}{\Delta L}\,, \qquad (9.19)$$

де $f(\theta)$ – функція, що визначається за допомогою спеціальної таблиці.

Аналізуючи дані, наведені в таблиці, можна зробити висновок, що при $\theta$>2,5 з відносною похибкою до 5% $\Delta L_t \approx \Delta L$.

**Визначення постійних втрат в береги**

Іноді після закінчення формування підпору виникають постійні втрати в береги гідротехнічних споруд.

Постійні втрати визначаються як різниця між витратами фільтраційного потоку в напрямку берега після закінчення формування підпору і витратами в тому ж напрямку до підпору. Для цього використовуються формули для розрахунку усталеної фільтрації (див. тему 8). Наприклад, за умови відсутності живлення по площі (для схеми, що наведена на рис. 9.7) витрати до підпору становлять:

$$q_{\text{пр}} = K\frac{h_0^2 - h_L^2}{2\,L}. \qquad (9.20)$$

Витрати після підпору становлять:

$$q_{\text{під}} = K\frac{y_0^2 - h_L^2}{2\,L}. \qquad (9.21)$$

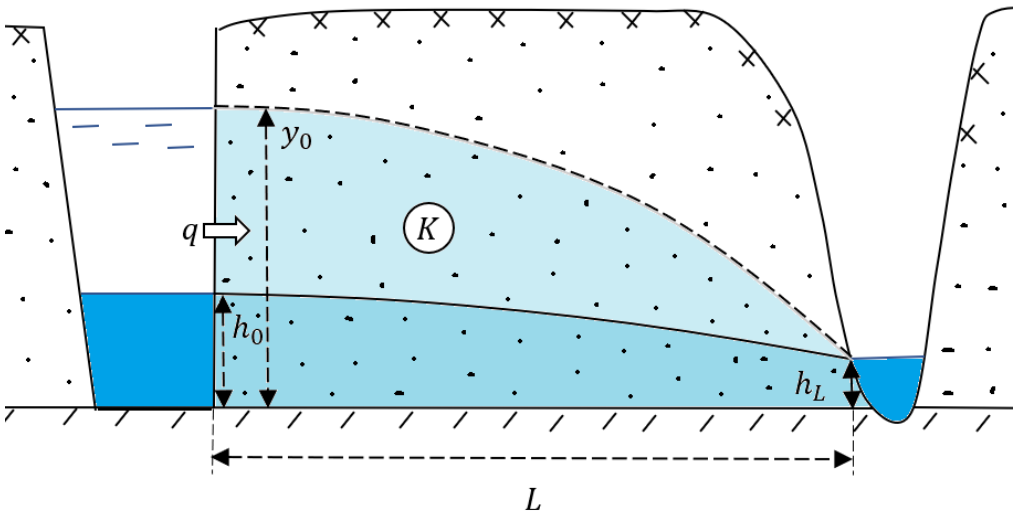


Рис. 9.7 Схема для визначення постійних втрат в береги

Тоді постійні втрати становлять:

$$q_{\text{пост}} = K\frac{y_0^2 - h_L^2}{2\cdot L} - K\frac{h_0^2 - h_L^2}{2\cdot L} = K\frac{y_0^2 - h_0^2}{2\cdot L}. \qquad (9.22)$$

**Визначення постійних втрат під фундаментом греблі**

Теорія фільтрації під гідротехнічними спорудами має пряме відношення до стійкості таких споруд. При фільтрації під фундаментом греблі існує тиск на фундамент греблі з боку потоку. Цей тиск направлений вверх, тобто створює так званий «протитиск», який треба враховувати при розрахунках стійкості греблі. Швидкість руху під греблею дуже висока, тому що напірний градієнт

потоку досягає значної величини. Висока швидкість може викликати механічну суфозію, що змінить міцність ґрунту.

Теорія фільтрації під гідротехнічними спорудами була розроблена М. Павловським, П. Фільчаковим, С. Нумеровим, Р. Чугаєвим.

При визначенні постійних втрат під фундаментом греблі застосовують залежності, які отримані на базі методу фільтраційних опорів (див. тему 4). У такому випадку питомі витрати потоку під фундаментом греблі визначаються за формулою:

$$q = \frac{\Delta H}{\Phi_{\text{сум}}} = \frac{K\,\Delta H}{\overline{\Phi}_{\text{сум}}}, \qquad (9.23)$$

де $\Delta H$ - перепад напору між верхнім та нижнім б'єфами, м; $K$ - коефіцієнт фільтрації, м/доб; $\Phi_{\text{сум}}$ - сумарний фільтраційний опір підземного контуру споруди на 1 погонний метр, доб/м; $\overline{\Phi}_{\text{сум}}$ - сумарний безрозмірний фільтраційний опір.

Наприклад, для непроникної греблі, схема якої наведена на рис. 9.8, маємо:

$$\overline{\Phi}_{\text{сум}} = \overline{\Phi}_{\text{вх}} + \overline{\Phi}_{\text{лін}} + \overline{\Phi}_{\text{вих}}, \qquad (9.24)$$

$$\overline{\Phi}_{\text{вх}} = 0{,}44 + 2\frac{l_{\text{у}}}{m_1} + \left(0{,}85 + 4\frac{l_{\text{з}}}{m_1}\right)\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right), \qquad (9.25)$$

$$\overline{\Phi}_{\text{лін}} = \frac{l}{m_2}, \qquad (9.26)$$

$$\overline{\Phi}_{\text{вих}} = 0{,}44\,. \qquad (9.27)$$

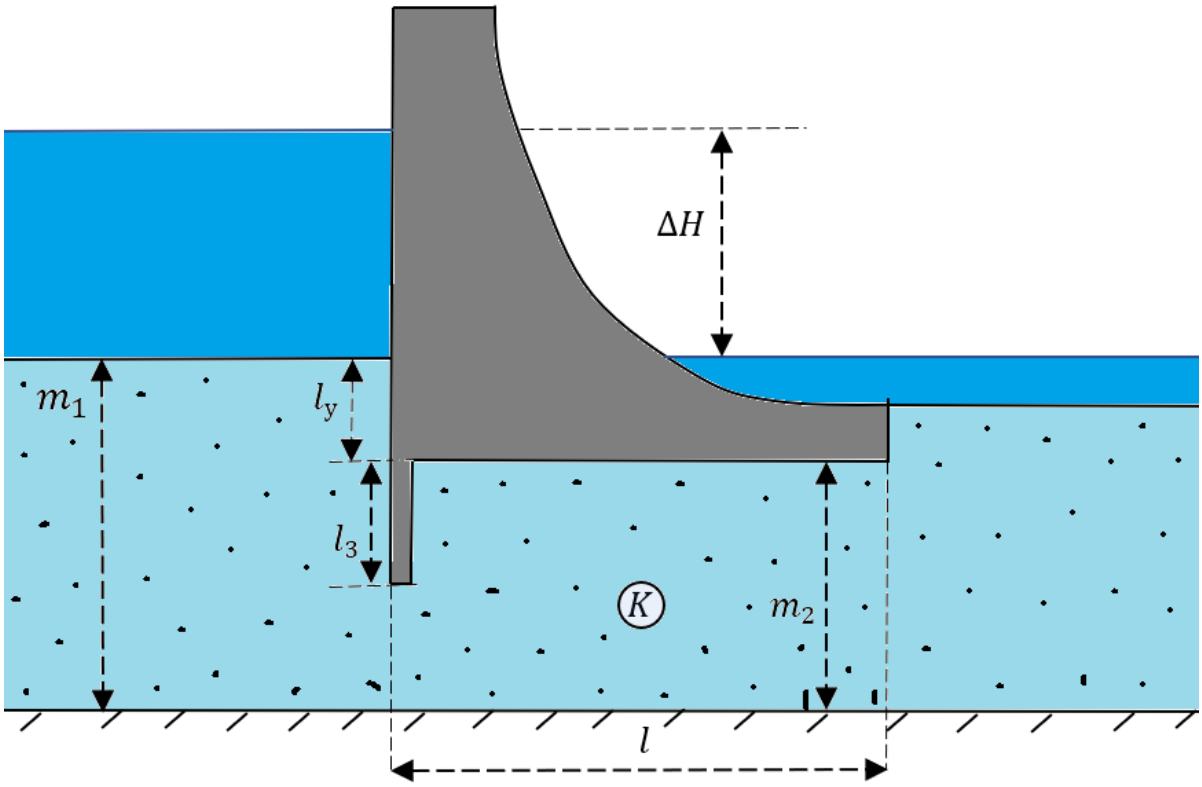


Рис. 9.8 Схема для визначення постійних втрат під фундаментом греблі

**Визначення постійних втрат поза плечима греблі**

При фільтрації поза плечима греблі створюється складний плановий потік в обхід, з верхнього б`єфа греблі до нижнього, який межує з потоками, що направлені до водосховища та нижнього б`єфа.

Для визначення втрат зона фільтрації в обхід примикання греблі до берегів схематизується (рис. 9.9):

1) б`єфи зводяться до однієї лінії;

2) контур потоку приймається по півеліпсу з півосями $r$ та $b$ і центром на осі греблі.

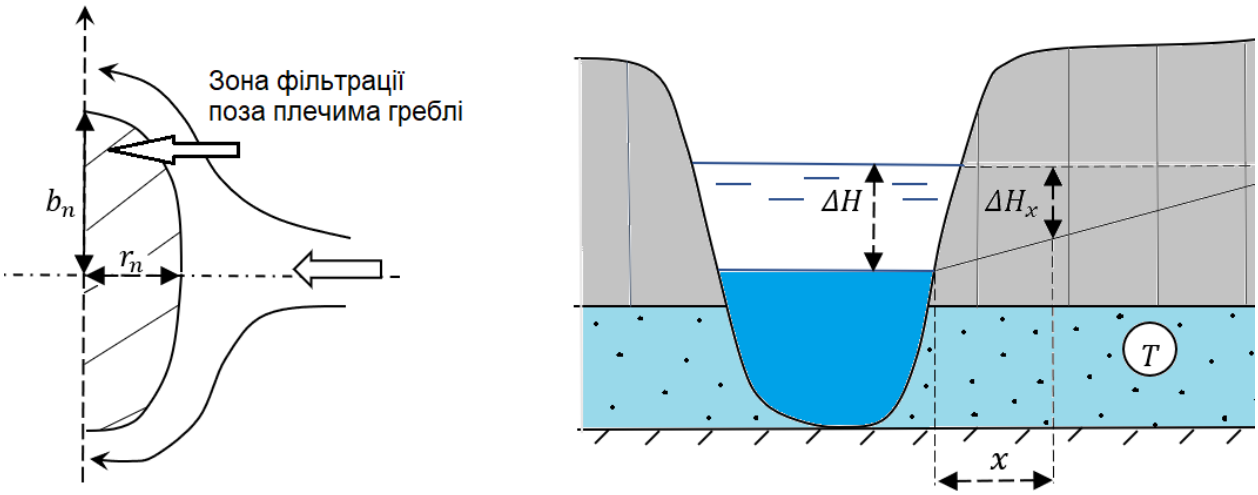


Рис. 9.9 Схема для розрахунку фільтрації поза плечима греблі

У такому випадку, для схеми потоку зі сталою водопровідністю, за рекомендаціями М. Веригіна, втрати $Q$ визначаються за залежностями:

$$Q = 0{,}732\, T\, \Delta H\, lg \frac{b_n}{r_n}, \qquad (9.28)$$

$$b_n = \frac{l}{\pi}, \qquad (9.29)$$

$$l \approx \frac{\Delta H}{\Delta H - \Delta H_x}\, x\,, \qquad (9.30)$$

де $r_n$ - радіус півкола, довжина якого дорівнює периметру контуру примикання греблі, який обтікає потік, м.

Наближено фільтраційні втрати (з перевищенням) можна визначити за залежністю:

$$Q \approx 2\, T\, \Delta H. \qquad (9.31)$$

За допомогою правила переходу можна отримати формули для умов, які відповідають схемі Дюпюі. При цьому слід попередньо визначити середню товщину потоку.

**Контрольні запитання**

1. Які втрати води з гідротехнічної споруди можуть виникати при заповненні її водою?
2. Що таке «тимчасові втрати води» з гідротехнічної споруди?
3. Що таке «підпір підземних вод»?

4. В яких випадках мають місце постійні втрати води з гідротехнічної споруди?
5. Які втрати води з водосховища можливі в районі греблі?
6. Як виконується оцінка усталеного підпору підземних вод?
7. Як виконується оцінка неусталеного підпору підземних вод?
8. Для чого в аналітичних розрахунках неусталеного підпору використовується формула Асатура?
9. Як визначаються постійні фільтраційні втрати в береги водосховищ і каналів?
10. Які особливості має процес фільтрації під тілом греблі, які негативні та небезпечні явища при цьому виникають?
11. Для чого під греблею влаштовується водонепроникна завіса?
12. Як визначається витрата потоку підземних вод, що проходить під греблею?
13. Яка схема приймається для визначення фільтраційної витрати обхідної фільтрації?
14. Що таке «межа впливу» водосховища?

# ТЕМА 10. ФІЛЬТРАЦІЯ В ЗОНІ ВПЛИВУ ГОРИЗОНТАЛЬНИХ ВОДОЗАБОРІВ

## Типи та умови дії горизонтальних водозаборів

*Горизонтальні водозабори* - це штучні споруди, які призначені для збору (каптажу) підземних вод. Довжина горизонтальних водозаборів у плані набагато більша, ніж інші їх розміри. Приклади горизонтальних водозаборів: відкриті канави, траншеї, галереї, підземні штреки, горизонтальні дрени.

При фільтраційних розрахунках в зоні дії горизонтальних водозаборів у більшості випадків довжину водозаборів приймають як нескінченно велику, тому фільтрацію можна розглядати як *профільну* (двомірну).

За *умовами розкриття* водоносних пластів горизонтальні водозабори поділяють на досконалі та недосконалі.

*Досконалі водозабори* - це такі водозабори, стінки яких розкривають водотривке ложе водоносного горизонту та депресійну поверхню безнапірного водоносного горизонту, що створюється за рахунок дії водозабору. У напірних водоносних пластах досконалий горизонтальний водозабір розкриває всю потужність водоносного пласта. Характерна риса досконалих горизонтальних водозаборів: такі водозабори приймають воду лише через стінки. Приклади досконалих горизонтальних водозаборів наведені на рис. 10.1.

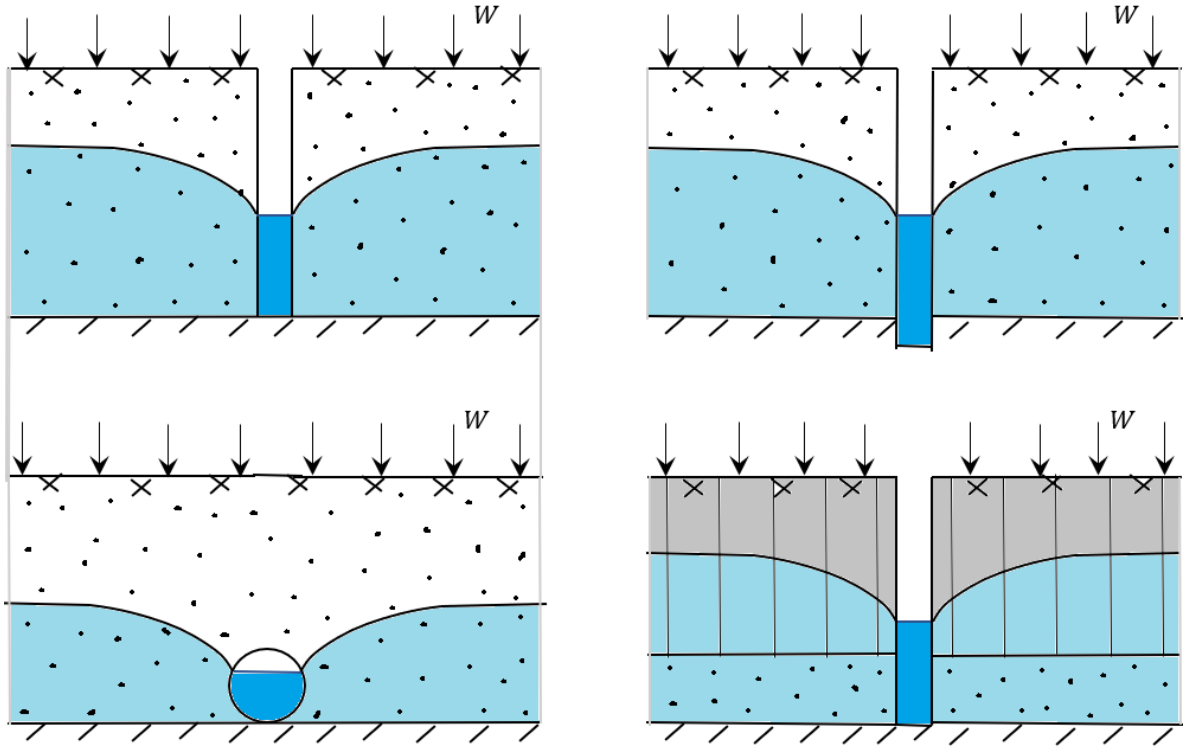


Рис. 10.1 Приклади досконалих горизонтальних водозаборів

*Недосконалі горизонтальні водозабори* - це такі водозабори, які не відповідають хоча б одній з названих вище умов.

За допомогою водозабору з водоносного горизонту відбирається деяка кількість води, яка має назву *«дебіт водозабору»*. Як наслідок відбору води, у водозаборі підтримується рівень води, нижчий за природний рівень підземних вод. Такий рівень має назву *динамічного.* Різниця між природним та динамічним рівнями (яка має назву *зниження рівня* $S_\partial$) веде до виникнення напірного градієнта. За рахунок цього градієнта вода рухається до водозабору, тому з обох сторін водозабору створюється поверхня знижених (у порівнянні з природними) напорів, у межах якої має місце фільтрація до водозабору. Така поверхня має назву *депресійної поверхні* (див. рис. 10.2):

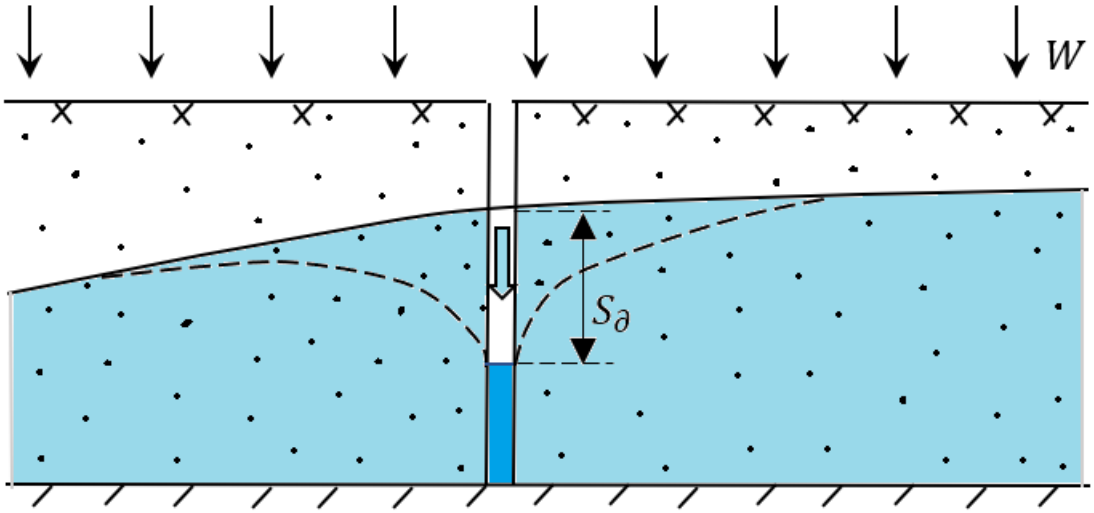


Рис. 10.2 Ілюстрація зниження рівня та виникнення депресійної поверхні при роботі горизонтального водозабору

Розглянемо загальний випадок формування депресійної поверхні в умовах безнапірного потоку.

На початку дії горизонтального водозабору з обох сторін від водозабору розвивається штучний неусталений потік. Зона зниження напору весь час збільшується. Витрати води, які надходять у водозабір, формуються за рахунок:

1) води, яка звільнюється при зниженні напору;
2) припливу природного потоку з боків;
3) живлення водоносного горизонту по площі.

Через деякий час зниження напору припиняється, потік до горизонтального водозабору стабілізується. З обох боків від водозабору створюється зона впливу. Довжина зони впливу по потоку визначається усталеною межею впливу $L_{\text{у}}$. *Усталена межа впливу* - це відстань від горизонтального водозабору до перетину, в якому депресійна поверхня стикається з природною поверхнею потоку (див. рис. 10.3):

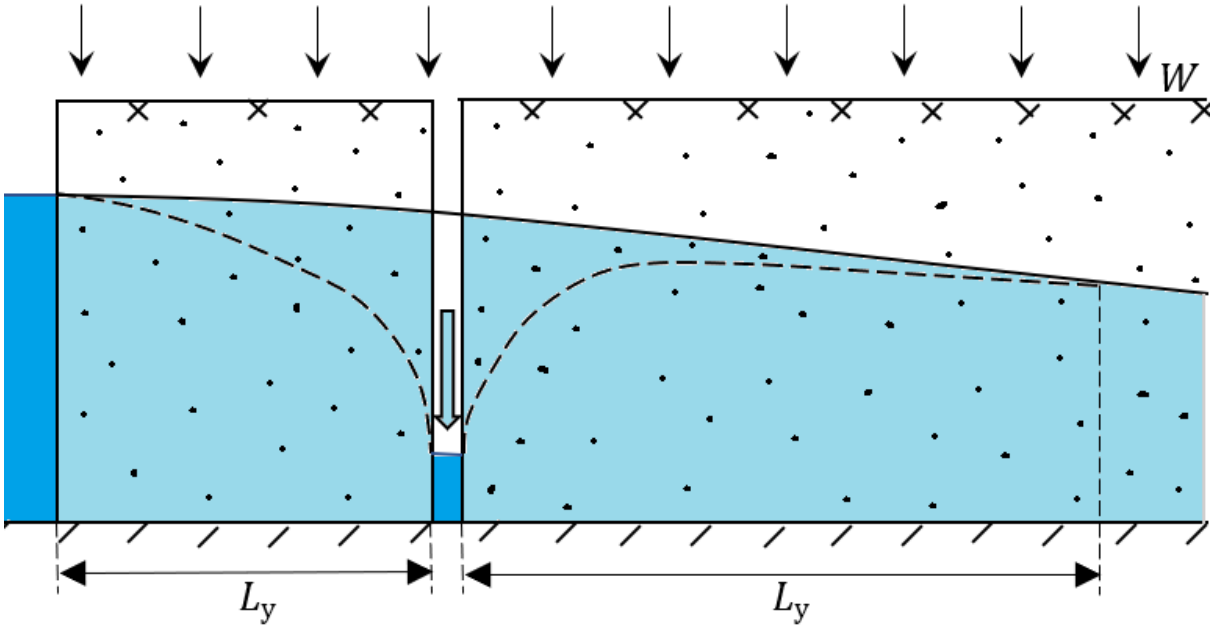


Рис. 10.3 Ілюстрація поняття усталеної межі впливу при роботі горизонтального водозабору

Усталений стан потоку відповідає стану динамічної рівноваги. При цьому дебіт горизонтального водозабору дорівнює сумарному припливу до водозабору в межах зони впливу за рахунок живлення з боків та живлення по площі. Тобто, межа зони впливу горизонтального водозабору відповідає довжині зони живлення водозабору.

**Гідродинамічні розрахунки одиночних досконалих горизонтальних водозаборів при усталеному режимі фільтрації**

По суті досконалий горизонтальний водозабір розділяє природний фільтраційний потік на два штучних потоки (рис. 10.4).

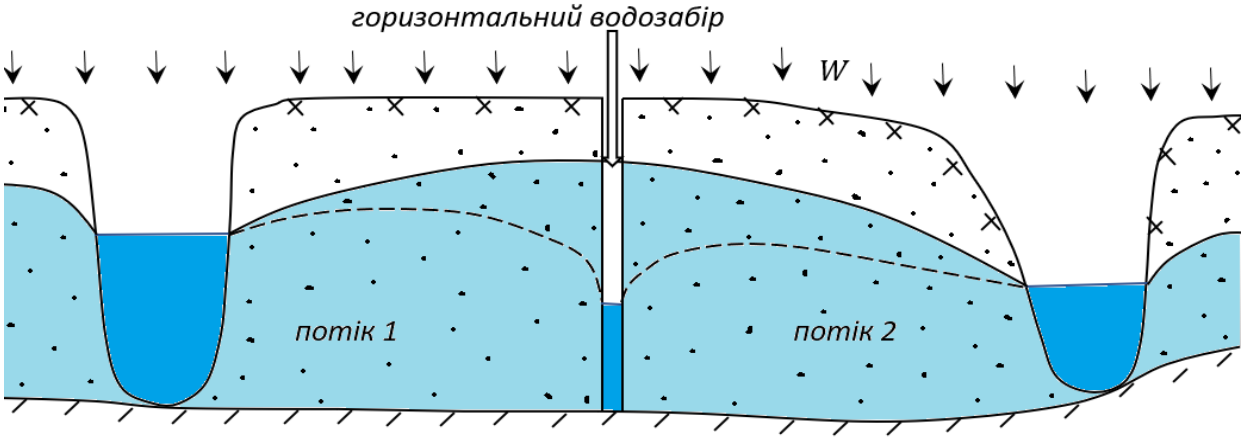


Рис. 10.4 Схематизація для гідродинамічного розрахунку одиночного досконалого горизонтального водозабору

Оскільки горизонтальний водозабір приймається як такий, що має нескінченну довжину, можна кожний із штучних потоків розглянути як одномірний відкритий потік. Тоді однією межею кожного штучного потоку буде контур живлення (на рис. 10.4 - річка), а другою - власне водозабір. У такому випадку для гідродинамічних розрахунків можна застосувати залежності, що розглянуті для випадку природного потоку (див. тему 8).

Але у випадку з горизонтальним водозабором у гідродинамічних розрахунках є дві особливості.

*Перша особливість* пов`язана з тим, що поблизу горизонтального водозабору в безнапірному потоці лінії току значно скривлюються, тобто, помітно порушується передумова Дюпюі. Цим порушенням більшість дослідників пояснюють факт виникнення *ділянки витікання (розриву рівнів)* $\Delta h$, яка має місце на стінках горизонтальної дрени (див. рис. 10.5).

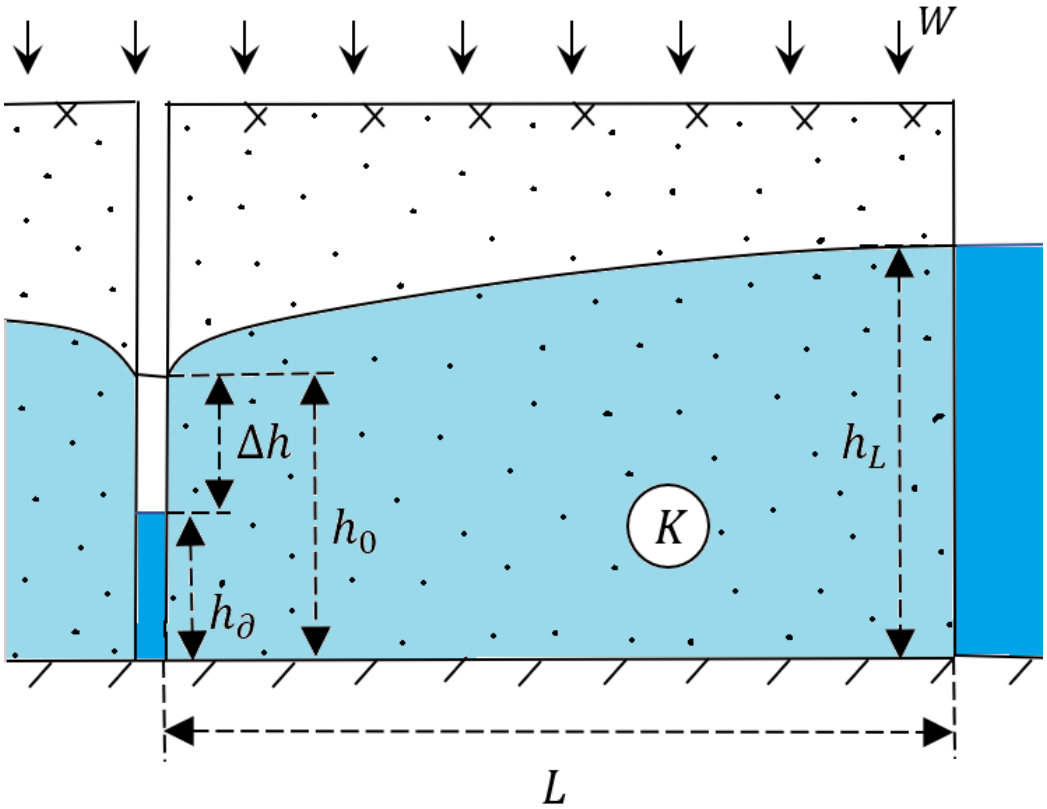


Рис. 10.5 Схема фільтрації з урахуванням ділянки витікання

Тоді в розрахункових формулах, що наведені в темі 8, в якості $h_0$ слід використовувати не $h_\partial$, а прийняти, що

$$h_0 = h_\partial + \Delta h \,, \qquad (10.1)$$

де $\Delta h$ - ділянка витікання.

Величина ділянки витікання зазвичай визначається за допомогою таких формул.

Для відкритих горизонтальних водозаборів з питомим дебітом $q_\partial$, коли відношення довжини основи дрени до її висоти $n$ перевищує 1:

$$\Delta h = \frac{q_\partial}{K}\,(n + 0{,}5)\,. \qquad (10.2)$$

Для відкритих горизонтальних водозаборів з питомим дебітом $q_\partial$, коли відношення довжини основи дрени до її висоти $n$ менше 1,

$$\Delta h = 0{,}75\,\frac{q_\partial}{K}\,(n + 1)\,. \qquad (10.3)$$

Для трубчатого горизонтального водозабору:

$$\Delta h = 0{,}44\,\frac{q_\partial}{K}\,. \qquad (10.4)$$

*Друга особливість* гідродинамічних розрахунків полягає в тому, що у формулах, що наведені в темі 8, замість $L$ використовується $L_{\text{у}}$ (усталена межа впливу).

Як визначається $L_{\text{у}}$, розглянуто нижче.

Якщо горизонтальний водозабір функціонує в обмеженому потоці, то $L_{\text{у}}$ - це відстань від водозабору до межі потоку.

Для необмеженого потоку $L_{\text{у}}$ визначається умовами живлення підземних вод.

У випадку, коли приплив до дрени з боків у природних умовах відсутній, а живлення по площі має місце, $L_{\text{у}}$ визначається таким чином.

1) Якщо живлення безнапірного потоку обумовлене лише інфільтрацією,

$$L_{\text{у}} = \sqrt{\frac{K}{2 \cdot W}\left({h_{\text{пр}}}^2 - {h_\partial}^2\right)}\,, \qquad (10.5)$$

де $h_{\text{пр}}$ - природна товщина потоку; $h_\partial$ – товщина потоку в дрені.

2) Якщо живлення безнапірного потоку обумовлене лише перетіканням знизу через роздільний слабопроникний шар із напірного пласта (напір в якому є сталим), що залягає нижче безнапірного,

$$L_{\text{у}} = \sqrt{\frac{m_{\text{рн}}\,K\,h}{K_{\text{рн}}}}, \qquad (10.6)$$

де $m_{\text{рн}}$ та $K_{\text{рн}}$ - та коефіцієнт фільтрації роздільного шару; $h$ та $K$ - товщина та коефіцієнт фільтрації безнапірного потоку.

3) Якщо живлення напірного потоку обумовлене перетіканням через роздільні слабопроникні шари із напірних пластів, які залягають зверху та знизу (напори в них є сталими),

$$L_{\text{у}} = \sqrt{K\ m\ \left(\frac{m_{\text{рв}}}{K_{\text{рв}}} + \frac{m_{\text{рн}}}{K_{\text{рн}}}\right)}, \qquad (10.7)$$

де $K$ та $m$ - коефіцієнт фільтрації та товщина напірного потоку; $m_{\text{рв}}$, $m_{\text{рн}}$, $K_{\text{рв}}$, $K_{\text{рн}}$ - товщини та коефіцієнти фільтрації верхнього та нижнього роздільних шарів.

**Гідродинамічні розрахунки одиночних досконалих горизонтальних водозаборів при неусталеному режимі фільтрації**

Слід зазначити, що з практичної точки зору значення має дослідження неусталеної фільтрації до досконалої горизонтальної дрени у випадку безнапірного потоку.

Якщо напір на зовнішній межі потоку є сталим, можна приблизно визначити час $t_y$ , після якого виникає режим, досить близький до усталеного. Якщо дебіт горизонтальної дрени також є сталим,

$$t_y \approx 0{,}8\ \frac{L_*^2}{a_p}, \qquad (10.8)$$

де $L_*$ - відстань до найближчої межі пласта, м; $a_p$ - коефіцієнт рівнепровідності, м$^2$/доб.

Тоді у випадку, коли розрахунковий час перевищує $t_y$, для розрахунків можна застосувати розв'язки, що отримані для усталеного режиму.

При розрахунковому часі, який не перевищує $t_y$, застосовуються розв'язки для неусталеного потоку, наприклад, розв'язок, який запропонував В. Шестаков (розв'язок типу $\Delta H_{x,t} = \Delta H^0\ F(x,t)$, див. тему 9). Таким чином визначається положення депресійної поверхні.

Для визначення дебіту горизонтальної дрени в умовах неусталеного режиму застосовується залежність:

$$q_t = \frac{{h_0}^2 - {h_\partial}^2}{L_{\text{в}}}\ \left[S_q(\tau) + 1\right] + q_n\ , \qquad (10.9)$$

де $h_0$ - товщина фільтраційного потоку в перетині дрени до її спорудження; $h_\partial$ - товщина фільтраційного потоку в перетині дрени після її спорудження; $q_n$ - питома витрата потоку в природних умовах у перетині дрени; $S_q(\tau)$ - це функція, значення якої визначається за допомогою відповідного графіка.

Аргумент $\tau$ визначається так:

$$\tau = \frac{a_p\, t}{L_в{}^2}, \qquad (10.10)$$

Як відомо, $a_p = \frac{K\, h_{сер}}{\mu}$. Для визначення $h_{сер}$ запропонована така залежність:

$$h_{сер} = \frac{3\, h_L + h_\partial}{4}, \qquad (10.11)$$

де $h_L$ - товщина фільтраційного потоку в перетині $x = L_в$.

Величина $L_в$ змінюється в часі та визначається за залежністю:

$$L_в = 3{,}16\sqrt{a_p\, t}, \qquad (10.12)$$

Слід зазначити, що $L_в$ не може перевищувати відстань до природної межі фільтраційного потоку (наприклад, річки). Тому, якщо розрахункова величина $L_в$ перевищує відстань до межі, слід прийняти, що $L_в$ дорівнює відстані до межі.

## Розрахунки недосконалих горизонтальних водозаборів

При роботі недосконалого горизонтального водозабору лінії течії поблизу водозабору досить сильно деформуються. Недосконалість водозабору викликає додатковий опір фільтраційного потоку при надходженні води у водозабір. Наслідком цього є те, що дебіт недосконалого водозабору зменшується в порівняні з дебітом досконалого (при однакових зниженнях рівня в досконалому та недосконалому водозаборах).

Крім того, недосконалий водозабір не ізолює ліву та праву частини фільтраційного потоку (досконалий ізолює). Тому поблизу недосконалого водозабору має місце взаємодія лівої та правої частин потоку, а характер руху води тут досить складний.

Складний характер руху води поблизу недосконалого водозабору потребує специфічних прийомів схематизації та наближених математичних

методів розв’язання. Серед них виділяють три основних прийоми (або методи): метод С. Авер`янова, метод Р. Чугаєва, метод В. Шестакова.

*Метод Авер`янова* базується на визначенні поправочного коефіцієнта недосконалості. Цей коефіцієнт застосовується в розрахункових залежностях для досконалих водозаборів. Для визначення коефіцієнта недосконалості застосовуються аналітичні залежності А. Авер`янова.

*Метод Чугаєва* базується на розділенні фільтраційного потоку на фрагменти (зони) та подальшому застосуванні методу конформних відображень. Наприклад, при дії недосконалого горизонтального водозабору в однорідному безнапірному потоці виділяють дві зони. Верхня зона (між депресійною поверхнею та горизонтальною лінією, яка проведена через дно водозабору) розглядається як безнапірна, а нижня зона - як напірна (див. рис. 10.6).

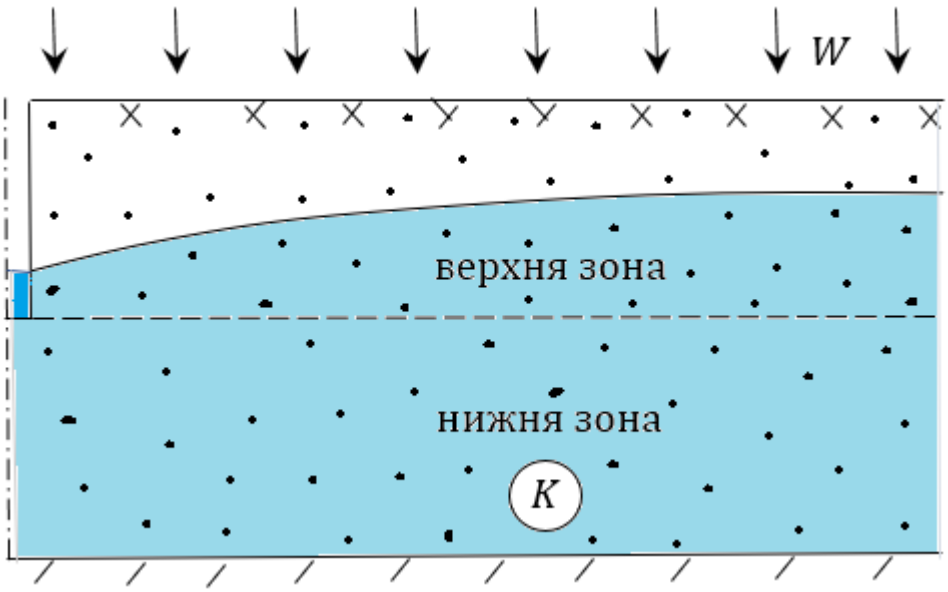


Рис. 10.6 Схема розділення фільтраційного потоку для застосування методу Чугаєва

Згідно із Р. Чугаєвим, окремо визначається притік з боку (як до досконалого водозабору) і притік через дно. На базі методу Чугаєва А. Романов отримав розрахункові формули у вигляді, який є найбільш зручним для практичного застосування.

*Метод Шестакова* полягає в тому, що недосконалий горизонтальний водозабір замінюється досконалим шляхом збільшення довжини фільтраційного потоку на величину, яка є еквівалентною гідравлічному опору (величина $L_{\text{нд}}$). Гідравлічний опір виникає в зоні різкої деформації ліній течії поблизу недосконалого водозабору.

Якщо пласт однорідний (рис. 10.7), $L_{\text{нд}}$ визначається за залежністю:

$$L_{\text{нд}} = 0{,}73\, m_{\text{р}}\, lg\, \frac{2\, m_{\text{р}}}{\pi\, d}\,, \qquad (10.13)$$

де $m_{\text{р}}$ - товщина пласта зі сталою водопровідністю або $m_{\text{р}} = h_{\partial}$ для безнапірного пласта; $d$ - діаметр горизонтального водозабору або діаметр кола, довжина якого дорівнює змоченому периметру горизонтального водозабору (див. рис. 10.7).

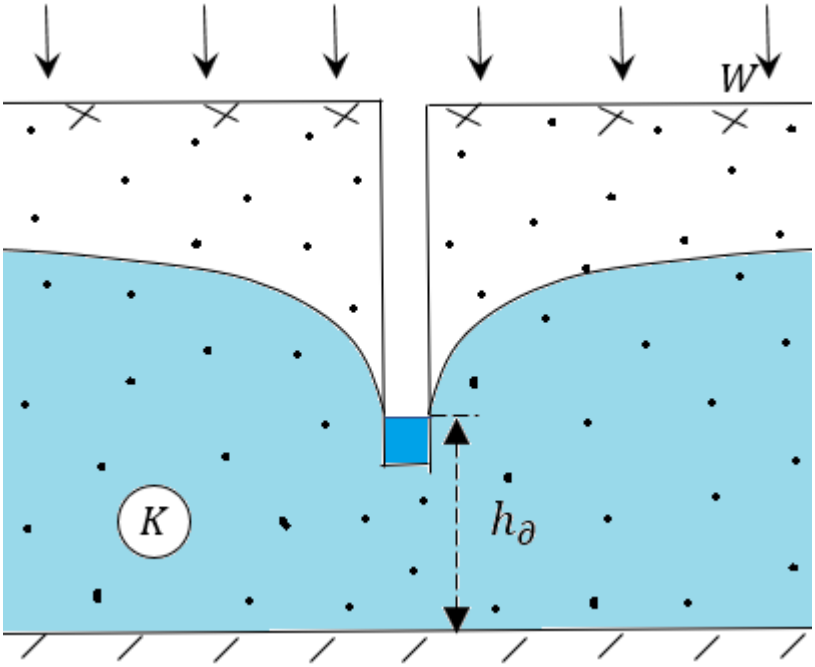


Рис. 10.7 Схема до розрахунку величини $L_{\text{нд}}$ для однорідного пласта

Якщо пласт двошаровий, а горизонтальна дрена перерізує верхній слабопроникний шар (див. рис. 10.8):

$$L_{\text{нд}} = 0{,}73\, m_{\text{н}}\, lg\, \frac{2\, m_{\text{н}}}{\pi\, d}\,. \qquad (10.14)$$

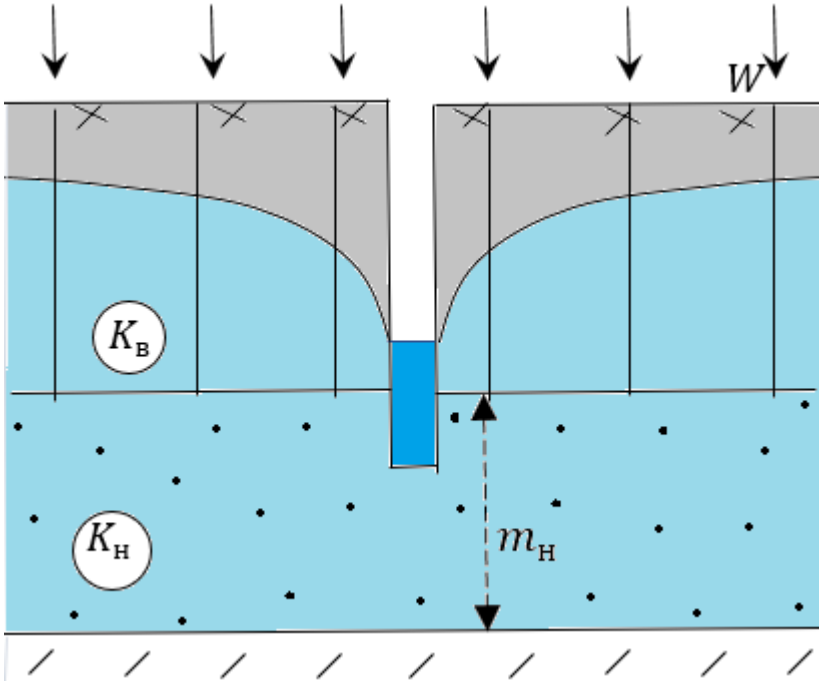


Рис. 10.8 Схема до розрахунку величини $L_{нд}$ для двошарового пласта (водозабір перерізує верхній слабопроникний шар)

Якщо пласт двошаровий, а горизонтальний водозабір розташований у верхньому слабопроникному шарі (див. рис. 10.9), окрім того, $\frac{K_н}{K_в}$>10:

$$L_{нд} = 0{,}73\ \frac{K_н}{K_в}\ m_н\ lg\frac{2\ m_в}{\pi\ d}\ , \qquad (10.15)$$

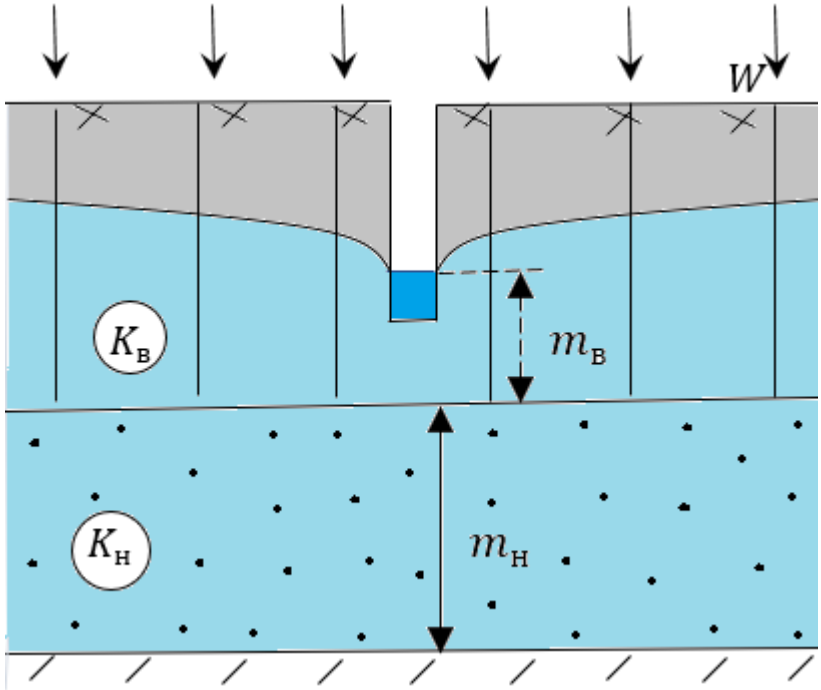


Рис. 10.9 Схема до розрахунку величини $L_{нд}$ для двошарового пласта (водозабір розташований у верхньому слабопроникному шарі)

Тепер для практичних розрахунків використовують, головним чином, метод Шестакова. Це обумовлене двома причинами:

1) найбільш прості розрахункові формули;
2) метод можна використовувати не лише для однорідних пластів, а також і для пластів більш складної будови.

Слід відзначити, що методи Авер`янова, Чугаєва та Шестакова справедливі для умов усталеної фільтрації. Для умов неусталеної фільтрації можна застосовувати метод Шестакова з урахуванням зміни величини $L_{\text{нд}}$ в часі (див. тему 9).

## Урахування довжини горизонтального водозабору

Для визначення дебіту горизонтального водозабору застосовуються залежності, які отримані за умови, що водозабір має нескінченну довжину (визначається питомий дебіт). У дійсності поблизу торцевих частин водозабору виникає радіальний потік, за рахунок якого загальний дебіт водозабору збільшується. Дебіт водозабору, отриманий за допомогою залежностей для одномірного потоку, відповідає лише середній частині водозабору. При наближенні до торців водозабору дебіт збільшується.

Тому М. Гіринський запропонував при визначенні загального дебіту водозабору ввести поправку - *коефіцієнтт короткості горизонтального водозабору* $\phi$. Цей коефіцієнт визначається за допомогою спеціальної таблиці і залежить від відношення $\frac{b}{L}$, де $b$ - довжина горизонтального водозабору, $L$ - відстань від водозабору до межі (або $L_{\text{у}}$ ). Тоді загальний дебіт горизонтального водозабору складає:

$$Q_{\text{д}} = \frac{q_{\partial}\, b}{\phi}, \qquad (10.16)$$

де $q_{\partial}$ - питомий дебіт дрени.

## Принципи гідродинамічного розрахунку систематичного горизонтального дренажу

*Систематичний горизонтальний дренаж* - це система, яка складається з великої кількості взаємодіючих горизонтальних водозаборів (горизонтальних дрен). Систематичний горизонтальний дренаж застосовується для зниження рівня ґрунтових вод на територіях, на яких має

місце живлення по площі (за рахунок атмосферних опадів, штучного зрошення або перетікання знизу). Дрени систематичного горизонтального дренажу в більшості випадків є недосконалими. Вони розміщуються по площі у відповідності з рельєфом місцевості, забудовою території та конкретними гідрогеологічними особливостями об`єкта.

Найчастіше систематичний горизонтальний дренаж застосовують на зрошувальних територіях. За рахунок дренажу зазвичай відводяться надлишкові ґрунтові води, які створюються за рахунок фільтраційних втрат при зрошуванні. Оскільки при зрошуванні величина живлення по площі дуже змінюється в часі, фільтрація в зоні дії систематичного дренажу є неусталеною.

Для гідродинамічного розрахунку систематичного горизонтального дренажу виконується така схематизація.

По-перше, приймається, що недосконалі горизонтальні дрени нескінченної довжини розташовані паралельно та на однаковій відстані одна від одної.

По-друге, горизонтальні дрени однаково заглиблені у водоносний горизонт, мають однакові розміри та діють при однакових зниженнях рівня.

По-третє, витрати горизонтальних дрен складаються з води, яка вивільнюється при зниженні вільної поверхні, та за рахунок живлення по площі.

Така схематизація дозволяє, замість системи взаємодіючих горизонтальних дрен, розглядати дію одиночної недосконалої горизонтальної дрени в обмеженому фрагменті. Боковими межами такого фрагмента є перетини, які проведені через центри між дренами та через вісь дрени (див. рис. 10.10).

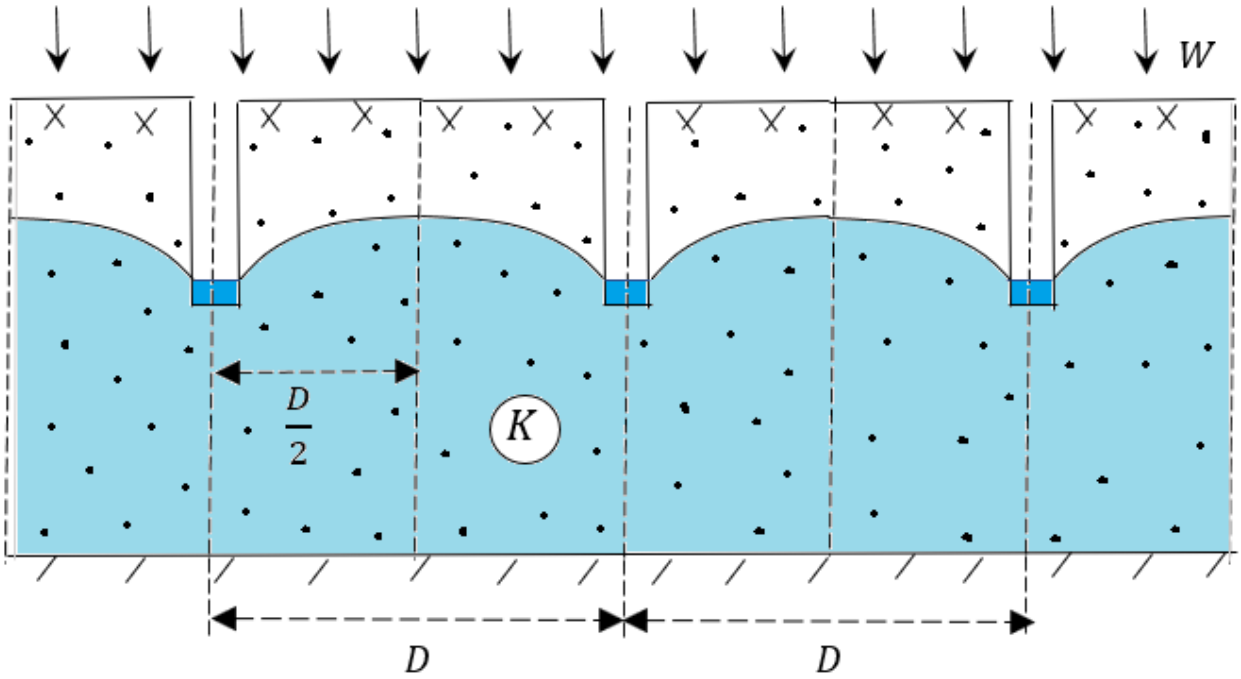


Рис. 10.10 Схематизація для гідродинамічного розрахунку систематичного горизонтального дренажу

Гідродинамічний розрахунок складається з визначення відстані між горизонтальними дренами $D$ і питомого дебіту дрени при конкретному розташуванні рівня води в дрені та по центру між дренами.

Але й при такому спрощенні методи аналітичного розрахунку горизонтального систематичного дренажу є досить складними.

Наближені методи розрахунку систематичного горизонтального дренажу розроблені С. Авер`яновим, В. Шестаковим, О. Олійником, І. Павловцем.

**Контрольні запитання**

1. Що називають горизонтальними водозаборами?
2. Які штучні споруди відносяться до горизонтальних водозаборів?
3. Які горизонтальні водозабори називають досконалими?
4. Які горизонтальні водозабори називають недосконалими?
5. Як класифікуються горизонтальні водозабори за умовами розкриття водоносних пластів?
6. Що таке дебіт водозабору?
7. Що таке динамічний рівень води в горизонтальному водозаборі?
8. Що таке депресійна поверхня?
9. Як відбувається процес розвитку депресійної поверхні в часі?
10. Що таке усталена межа впливу горизонтального водозабору?
11. Які залежності є придатними для розрахунку горизонтальних досконалих водозаборів в умовах усталеної фільтрації?
12. За якими залежностями розраховується усталений потік до горизонтальної дрени, якщо водоносний пласт має сталу водопровідність?
13. За якими залежностями розраховується усталений потік до горизонтальної дрени, якщо водоносний пласт є безнапірним на горизонтальному водотриві?
14. Що таке ділянка витікання і чому вона виникає?
15. Як визначається величина впливу горизонтальної дрени у гідродинамічних розрахунках?
16. Як визначається час настання усталеного режиму фільтрації до горизонтального водозабору в безнапірному потоці за умови, що гідродинамічній напір на зовнішній межі потоку є сталим?
17. Що таке неусталена межа впливу горизонтальної дрени?
18. Які причини викликають необхідність застосування для розрахунку недосконалих горизонтальних водозаборів наближених математичних методів та особливих прийомів схематизації?
19. Якими методи пропонуються для гідродинамічних розрахунків неусталених досконалих горизонтальних дрен?

20. У чому суть методу Аверьянова для розрахунку недосконалих горизонтальних водозаборів?
21. У чому суть методу Чугаєва для розрахунку недосконалих горизонтальних водозаборів?
22. У чому суть методу Шестакова для розрахунку недосконалих горизонтальних водозаборів?
23. Чому при гідродинамічних розрахунках необхідно враховувати скінчену довжину горизонтальної дрени?
24. Як визначається коефіцієнт короткості горизонтальної дрени?
25. Як визначається загальний дебіт горизонтальної дрени з урахуванням скінченності її довжини?
26. Що таке «систематичний горизонтальний дренаж»?
27. В яких випадках є доцільним використання систематичного горизонтального дренажу?
28. Як схематизуються умови для гідродинамічного розрахунку систематичного горизонтального дренажу?

# ТЕМА 11. ФІЛЬТРАЦІЯ В ЗОНІ ВПЛИВУ ОДИНОЧНИХ ВЕРТИКАЛЬНИХ ВОДОЗАБОРІВ (СВЕРДЛОВИН)

## Типи вертикальних водозаборів та умови їхньої дії

*Вертикальні водозабори* - це штучні споруди, які призначені для збору (каптажу) води. Розміри вертикальних водозаборів у плані набагато менші, ніж розміри водоносних пластів та потужність цих пластів. Приклади вертикальних водозаборів: свердловини, шахтні колодязі, шурфи.

Водоприймаюча частина свердловини або колодязя має назву *захватної частини* або *фільтра.* Частина вертикального водозабору, де встановлене водонепроникне кріплення, має назву *глухої* або *неробочої* частини.

Вертикальні водозабори, як й горизонтальні, поділяють на *досконалі* та *недосконалі.* Розрізняють два види недосконалості вертикальних водозаборів:

1) за ступенем розкриття водоносного горизонту;

2) за характером розкриття водоносного горизонту.

*Досконалими за ступенем розкриття* є такі водозабори, водоприймаюча частина яких розкриває водотривке ложе, а в безнапірних пластах розкриває також депресійну поверхню, що виникає внаслідок дії водозабору. У напірних пластах водоприймаюча частина досконалого вертикального водозабору розкриває всю потужність пласта. Слід зазначити, що досконалий горизонтальний водозабір приймає до себе воду лише через стінки захватної частини. Недосконалі за ступенем розкриття вертикальні водозабори не задовольняють хоча б однієї з вищевказаних умов. Отже, тут спостерігається майже повна аналогія з недосконалістю горизонтальних водозаборів (див. тему 10).

*Недосконалість за характером розкриття* визначається особливостями водоприймаючої частини водозаборів, а саме наявністю фільтрів, зміною водопроникності породи в зоні водоприймаючої частини, порушенням тут лінійного закону фільтрації. Практично всі вертикальні водозабори є недосконалими за характером розкриття водоносного горизонту.

Вертикальні свердловини є основним засобом видобутку підземних вод. Тому розгляд розрахункових залежностей буде виконаний для умов відкачування, яке є основною формою дії водозабірної свердловини.

Кількість води, яка відкачується із свердловини, має назву *витрати* або *дебіту свердловини* $Q$. При відкачуванні у свердловині створюється певний горизонт (рівень) води. Він має назву *динамічного рівня*. Цей горизонт є нижчим за горизонт, який був у свердловині до відкачування (*статичний рівень).* Різниця між статичним та динамічним рівнями води у свердловині має назву *зниження рівня* $S_c$.

Як наслідок відкачування, поблизу свердловини створюється зона знижених напорів. Вона має назву *депресійної воронки* в безнапірних горизонтах та *п`єзометричної воронки* в напірних горизонтах. Якщо режим фільтрації при відкачуванні усталений, розміри цієї воронки є сталими в часі. Розмір депресійної або п`єзометричної воронки визначається *радіусом впливу*.

Сталі в часі розміри депресійної або п`єзометричної воронки відповідають стану динамічної рівноваги, при якому дебіт свердловини дорівнює динамічному припливу в межах її *зони впливу.*

Область, у межах якої формується потік до свердловини, має назву *області живлення,* а радіус цієї зони - *радіуса живлення*.

## Одиночні досконалі свердловини в ізольованому пласті за умов усталеної фільтрації

В ізольованому по вертикалі і необмеженому в плані водоносному пласті при відсутності природного потоку рух підземних вод поблизу одиночної вертикальної свердловини можна розглядати як площинно-радіальний. Такий потік вперше був розглянутий Дюпюі.

У такому випадку лінії току в плані являють собою радіуси, а поверхні рівних напорів - циліндричні поверхні із центрами на осі свердловини (рис. 11.1).

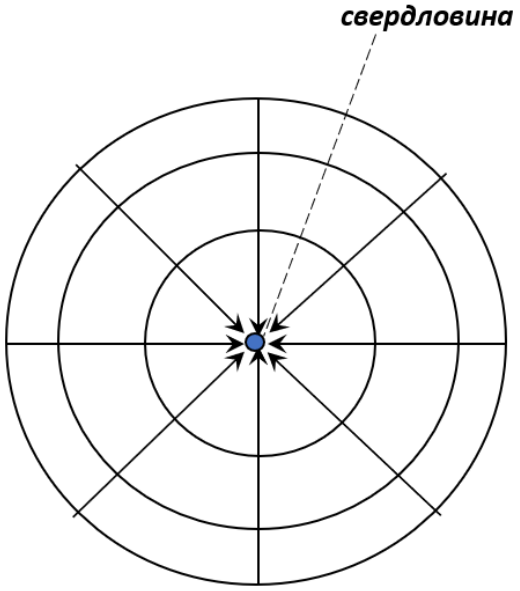


Рис. 11.1 Схема радіального потоку до свердловини у плані

Визначимо витрати такого потоку, або дебіт свердловини $Q$. Згідно із законом Дарсі (див. тему 2):

$$Q = K\,F\,I\,, \qquad (11.1)$$

$$I = \frac{\Delta H}{\Delta l}, \qquad (11.2)$$

де $Q$ - витрати фільтраційного потоку з поперечним перетином площею $F$ при напірному градієнті $I$; $K$ - коефіцієнт фільтрації; $\Delta H$ - зміна гідродинамічного напору на відстані $\Delta l$.

Розглянемо перетин по радіусу такого потоку (рис. 11.2).

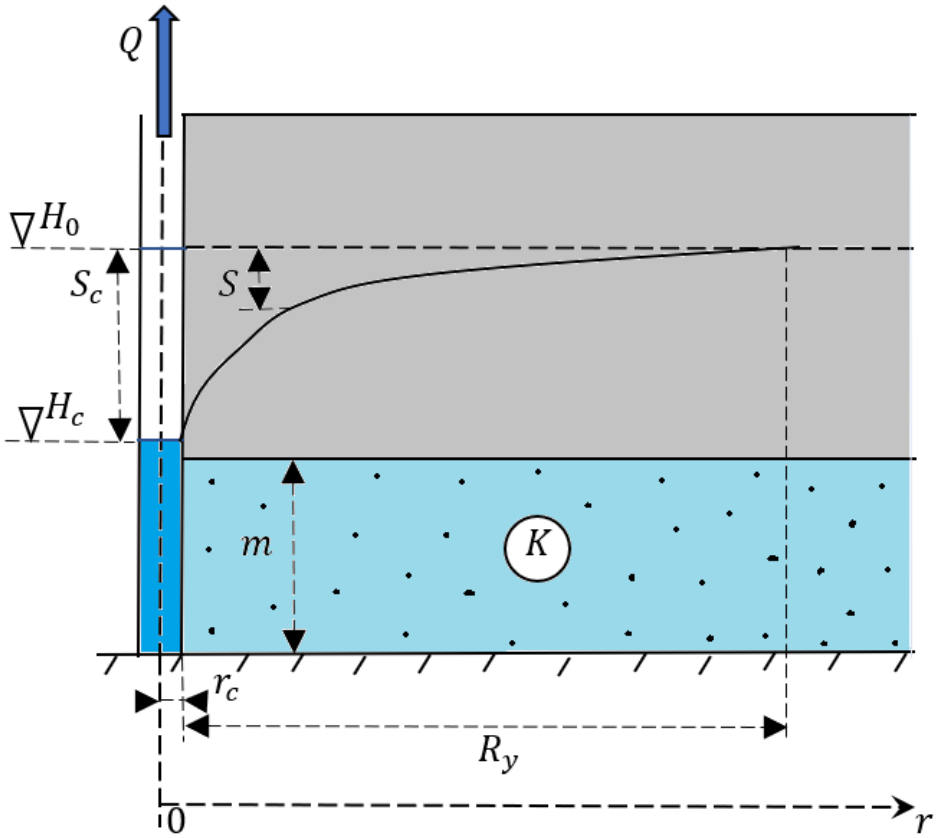


Рис. 11.2 Схема перетину радіального потоку по його радіусу

Ширина $b$ для площинно-радіального потоку складає:

$$b = 2\,\pi\,r\,, \qquad (11.3)$$

де $r$ - радіус.

Тому площа поперечного перетину потоку $F$ становить:

$$F = b\,m = 2\,\pi\,r\,m\,, \qquad (11.4)$$

де $m$ – товщина потоку.

Напірний градієнт відповідно дорівнює:

$$I = \frac{dH}{dr}. \qquad (11.5)$$

Тому для площинно-радіального потоку закон Дарсі має вигляд:

$$Q = K\,2\,\pi\,r\,m\,\frac{dH}{dr} = 2\,\pi\,r\,T\,\frac{dH}{dr}, \qquad (11.6)$$

де $T = K\,m$ – коефіцієнт водопровідності.

Розділивши змінні, отримуємо:

$$dH = \frac{Q}{2\,\pi\,T}\,\frac{dr}{r}. \qquad (11.7)$$

Проінтегруємо цей вираз у межах $r = r_c$ (тоді $H = H_c$) та поточним $r$. У такому випадку маємо:

$$H - H_c = \frac{Q}{2\,\pi\,T}\,ln\frac{r}{r_c}. \qquad (11.8)$$

У зниженнях напору $S$ цей вираз має вигляд:

$$S_c - S = \frac{Q}{2\,\pi\,T}\,ln\frac{r}{r_c}. \qquad (11.9)$$

Якщо прийняти, що існує зона впливу свердловини, радіус якої дорівнює $R_y + r_c$, а зниження на межі зони впливу $S = 0$, маємо:

$$S_c = \frac{Q}{2\,\pi\,T}\,ln\frac{R_y + r_c}{r_c}. \qquad (11.10)$$

Слід враховувати, що для свердловини $r_c << R_y$. Тому можна стверджувати, що $R_y + r_c \approx R_y$, тобто:

$$S_c = \frac{Q}{2\,\pi\,T}\,ln\frac{R_y}{r_c}. \qquad (11.11)$$

Запишемо цей вираз відносно дебіту свердловини $Q$:

$$Q = \frac{2\,\pi\,T\,S_c}{ln\frac{R_y}{r_c}}\,. \qquad (11.12)$$

Формула (11.12) відповідає формулі Дюпюі для визначення дебіту досконалої свердловини в напірних потоках (точніше, у потоках із постійною водопровідністю).

Застосовуючи правила переходу (див. тему 8), можна отримати аналогічні формули для схем Дюпюі та Гіринського.

Так, для схеми однорідного безнапірного потоку на горизонтальному водотриві (схема Дюпюі) маємо:

$$h_0^2 - h_c^2 = \frac{Q}{\pi\,K}\;ln\frac{R_y}{r_c}\,. \qquad (11.13)$$

Для горизонтально-шаруватого потоку (схема Гіринського):

$$G_0 - G_c = \frac{Q}{2\,\pi}\;ln\frac{R_y}{r_c}\,. \qquad (11.14)$$

**Диференціальне рівняння радіальної неусталеної фільтрації**

До того часу, як виникне усталений режим фільтрації до свердловини, існує деякий період неусталеної фільтрації. Протягом цього періоду формується депресійна (п`єзометрична) воронка.

В умовах напірної фільтрації динамічний рівень води у свердловині розташований вище, ніж верхній водотрив. Тому в таких умовах неусталена фільтрація виникає за рахунок прояву пружних властивостей води та породи, а п`єзометрична воронка в ізольованому напірному потоці розширюється досить швидко. Якщо відсутнє живлення по площі, радіус впливу може досягнути досить значної величини. При наявності живлення по площі (за рахунок перетікання) процес формування поверхні депресії буде більш повільним, а п`єзометрична воронка буде мати менші розміри.

Взагалі, процес формування поверхні депресії при дії свердловини залежить від:

1) водопроникності пласта;

2) пружних властивостей води та породи;

3) наявності перетікання;

4) характеру зміни тиску у водоносному пласті.

Характер зміни тиску визначається режимом відкачування із свердловини.

Найчастіше розглядають два режими відкачування.

*Перший режим* - це режим заданого дебіту свердловини. Тобто, свердловина розглядається як межа, на якій існує гранична умова II роду ($Q = f(t),\ Q = const$). Такий режим виникає, коли відкачування із свердловини виконується за допомогою насосу із заданою продуктивністю. Динамічний рівень у свердловині при цьому режимі буде безперервно знижуватися, відповідно будуть знижуватися напори в межах п`єзометричної воронки. Перший режим є найбільш типовим.

*Другий режим* - це режим заданого зниження напору у свердловині. Тобто, свердловина розглядається як межа, на якій існує гранична умова I роду ($H = f(t),\ H = const$). На практиці такий режим виникає за умов самовиливу води із свердловини, а також у деяких вертикальних водозаборів спеціальних типів (забивні фільтри, поглинаючі свердловини). Дебіт водозабору в часі безперервно зменшується.

Як відомо, процес формування поверхні депресії в часі описується *диференціальним рівнянням радіальної неусталеної фільтрації.*

Для отримання такого рівняння розглянемо баланс циліндричного елемента пласта товщиною $dr$ за малий період часу $dt$. При цьому будемо враховувати живлення по площі через покрівлю та підошву пласта $W = W_{пок} + W_{під}$ ( див. рис. 11.3).

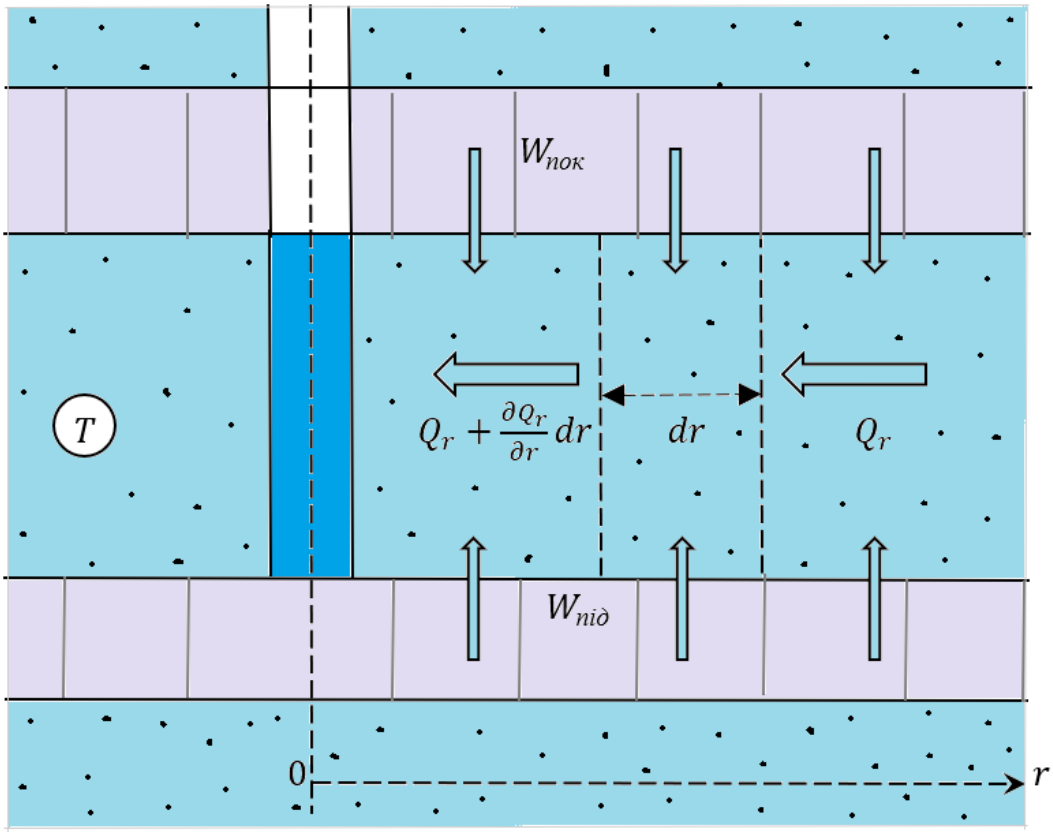


Рис. 11.3 Схема для розгляду балансу циліндричного елемента пласта

По циліндричній поверхні, яка має радіус $r$, в елемент надходять витрати $Q_r$. Ці витрати на виході з елемента мають приріст $\frac{\partial Q_r}{\partial r} dr$.

Зміна кількості води в елементі за час $dt$ дорівнює:

$$du = \left(-\frac{\partial Q_r}{\partial r} + 2\,\pi\,r\,W\right) drdt\,. \qquad (11.15)$$

Ця кількість води, як відомо, витрачається на зміну пружних запасів в елементі за час $dt$:

$$du = 2\,\pi\,r\,\mu^* \frac{\partial H}{\partial t} drdt\,. \qquad (11.16)$$

Тому можна записати:

$$2\,\pi\,r\,\mu^* \frac{\partial H}{\partial t} drdt = \left(-\frac{\partial Q_r}{\partial r} + 2\,\pi\,r\,W\right) drdt\,, \qquad (11.17)$$

або

$$2\,\pi\,r\,\mu^* \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial Q_r}{\partial r} + 2\,\pi\,r\,W\,. \qquad (11.18)$$

Це і є *рівняння нерозривності радіальної неусталеної фільтрації.*

За законом Дарсі:

$$Q_r = -2\,\pi\,r\,T\,\frac{\partial H}{\partial r}\,. \qquad (11.19)$$

Використовуючи вираз для $Q_r$ з формули (11.19), отримуємо з рівняння нерозривності (11.18) *диференціальне рівняння неусталеної радіальної фільтрації*:

$$\frac{T}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial H}{\partial r}\right) + W = \mu^* \frac{\partial H}{\partial t}\,, \qquad (11.20)$$

або

$$a_n\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial H}{\partial r}\right) + \frac{W}{\mu^*} = \frac{\partial H}{\partial t}\,. \qquad (11.21)$$

Також це рівняння можна записати наступним чином:

$$T\,\left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial H}{\partial r}\right) + W = \mu^* \frac{\partial H}{\partial t}\,, \qquad (11.22)$$

або

$$a_n \left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right) + \frac{W}{\mu^*} = \frac{\partial H}{\partial t}\,. \qquad (11.23)$$

У випадку ізольованого пласта (коли перетікання відсутнє) $W = 0$, тому маємо:

$$T\left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right) = \mu^* \frac{\partial H}{\partial t}\,, \qquad (11.24)$$

або

$$a_n \left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right) = \frac{\partial H}{\partial t}\,. \qquad (11.25)$$

**Дія досконалої свердловини у необмеженому в плані ізольованому напірному потоці із сталою водопровідністю при сталому дебіті**

Розв’язок цієї задачі вперше отримав Ч. Тейс у 1935 році (звідси і назва розрахункової формули - формула Тейса). Розв’язок має такий вигляд:

$$S = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot T}\,W(u)\,, \qquad (11.26)$$

$$u = \frac{r^2}{4\,a_n\,t}\,, \qquad (11.27)$$

де $S$ - зниження гідродинамічного напору в точці на відстані $r$ від центра свердловини (див. рис. 11.4); $W(u)$ – спеціальна функція.

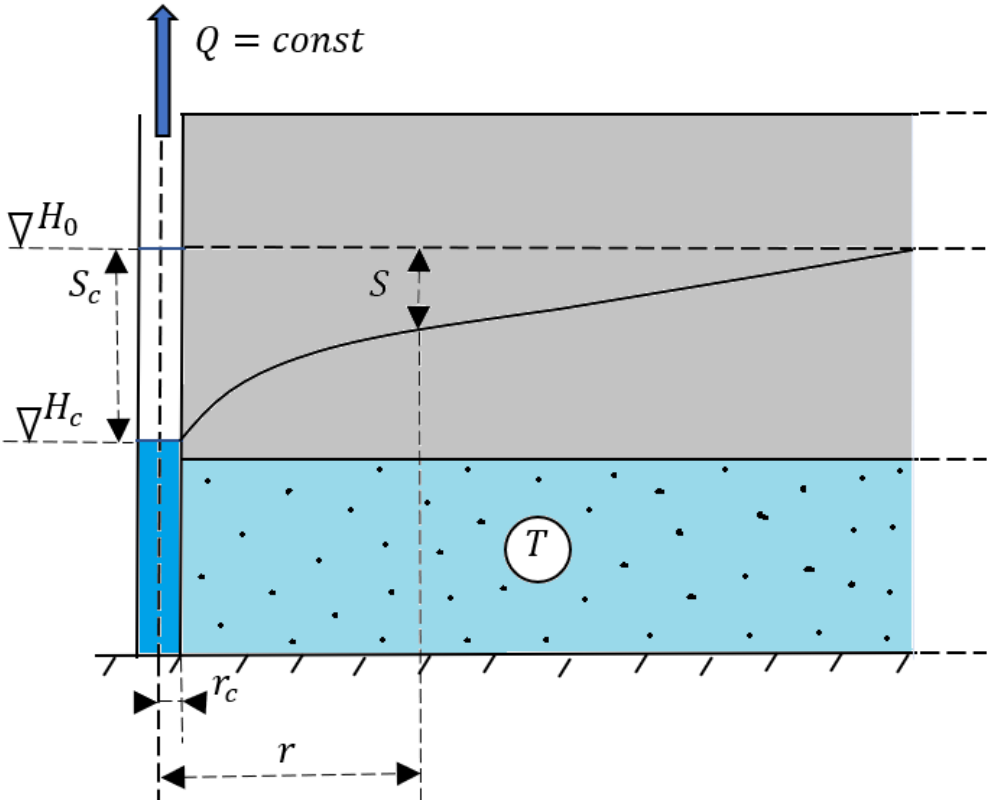


Рис. 11.4 Схема до розрахункової формули Тейса

Функція $W(u)$ має назву *функції свердловини* (*well-функції* за Ч. Тейсом). Вона пов`язана із відомою з математики функцією $E_i$ (*інтегральним експоненціалом)*:

$$W(u) = -E_i(-u) = \int_u^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = 0{,}577 - \ln(u) + u - \\ - \frac{u^2}{4} + \frac{u^3}{18} - \frac{u^4}{96} + \cdots \qquad (11.28)$$

Значення функції свердловини подані у вигляді таблиць або графіків. Якщо $u < 0{,}1$, то з відносною похибкою в 5% можна записати:

$$W(u) = -0{,}577 - ln\, u = ln \frac{2{,}25\, a_n\, t}{r^2}. \qquad (11.29)$$

У такому випадку формула Тейса має вигляд:

$$S = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot T}\, ln \frac{2{,}25\, a_n\, t}{r^2}, \qquad (11.30)$$

або

$$S = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot T}\, ln \frac{1{,}5\sqrt{a_n\, t}}{r}. \qquad (11.31)$$

Для зниження гідродинамічного напору у свердловині маємо:

$$S_c = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot T} \; ln \frac{1{,}5\sqrt{a_n \, t}}{r_c} \, . \qquad (11.32)$$

Як відомо, для усталеного руху, див. формулу (11.11):

$$S_c = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot T} \; ln \frac{R_y}{r_c} \, . \qquad (11.33)$$

Звідси запровадиться поняття *неусталеного радіуса впливу* $R_t$:

$$R_t = 1{,}5 \sqrt{a_n \, t} \, , \qquad (11.34)$$

Розглянемо вираз для швидкості зниження гідродинамічного напору. Для цього слід продиференціювати вираз $S = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot T} \; ln \frac{2{,}25 \, a_n \, t}{r^2}$ по часу $t$.

У результаті отримуємо:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot T} \; \frac{1}{t} \, . \qquad (11.35)$$

Аналіз виразу (11.35) показує, що при $u < 0{,}1$ швидкість зниження гідродинамічного напору не залежить від радіуса $r$. Тому *при* $u < 0{,}1$ *при відкачуванні п`єзометрична поверхня знижується паралельно відносно себе.*

Можна також отримати такий вираз при $u < 0{,}1$:

$$S_c - S = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot T} \left( ln \frac{1{,}5\sqrt{a_n \, t}}{r_c} - ln \frac{1{,}5\sqrt{a_n \, t}}{r} \right) , \qquad (11.36)$$

або

$$S_c - S = \frac{Q}{2 \, \pi \, T} ln \frac{r}{r_c} \, . \qquad (11.37)$$

Цей вираз повністю *співпадає з виразом* (11.9) *для усталеної фільтрації.*

Тому можна стверджувати, що при $u < 0{,}1$ п`єзометрична воронка при відкачуванні знижується паралельно відносно себе. Тобто, розподіл гідродинамічних напорів у кожний момент часу відповідає закономірностям усталеного режиму фільтрації. Такий режим має назву *квазіусталеного (квазістаціонарного).*

## Дія досконалої свердловини в необмеженому у плані неоднорідно-шаруватому пласті при сталому дебіті

Залежності, які отримані для умов необмеженого у плані ізольованого напірного потоку із сталою водопровідністю, можна використовувати для однорідно-шаруватих пластів в аналогічних умовах. Але вони є непридатними для неоднорідно-шаруватих пластів, оскільки має місце перетікання через слабопроникні шари (пласти не є ізольованими).

У такому випадку слід визначити величину живлення по площі в диференціальному рівнянні радіальної неусталеної фільтрації.

Якщо прийняти передумову Мятієва-Гіринського; припустити, що в слабопроникних шарах режим фільтрації є жорстким; гідродинамічний напір у шарах, звідки має місце перетікання, є сталим, величину величину живлення по площі $W$ можна визначити за залежністю (див. тему 6):

$$W = W_{\text{пок}} + W_{\text{під}} = \frac{K_{\text{пок}}}{m_{\text{пок}}}\,(H - H_{\text{в}}) + \frac{K_{\text{під}}}{m_{\text{під}}}\,(H - H_{\text{н}})\,, \qquad (11.38)$$

де $K_{\text{пок}}$ – коефіцієнт фільтрації верхнього слабопроникного шару; $m_{\text{пок}}$ - товщина верхнього слабопроникного шару; $H_{\text{в}}$ - гідродинамічний напір у верхньому проникному шарі; $K_{\text{під}}$ – коефіцієнт фільтрації нижнього слабопроникного шару; $m_{\text{під}}$ - товщина нижнього слабопроникного шару; $H_{\text{н}}$ - гідродинамічний напір у нижньому проникному шарі; $H$ - гідродинамічний напір у проникному шарі, що розглядається.

Тоді диференціальне рівняння фільтрації буди мати вигляд:

$$T\,\left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial H}{\partial r}\right) + \frac{K_{\text{пок}}}{m_{\text{пок}}}\,(H - H_{\text{в}}) + \frac{K_{\text{під}}}{m_{\text{під}}}\,(H - H_{\text{н}}) = \mu^*\,\frac{\partial H}{\partial t}\,. \qquad (11.39)$$

Використовуючи поняття фактору перетікання $B$, можна записати:

$$T\,\left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial H}{\partial r}\right) + T\,\frac{(H - H_{\text{в}})}{B_{\text{пок}}^2} + T\,\frac{(H - H_{\text{н}})}{B_{\text{під}}^2} = \mu^*\,\frac{\partial H}{\partial t}\,. \qquad (11.40)$$

Можна також використати поняття узагальнюючого фактору перетікання $B_{\text{у}}$:

$$B_{\text{у}} = \sqrt{\frac{m_{\text{пок}}\,T}{K_{\text{пок}}} + \frac{m_{\text{під}}\,T}{K_{\text{під}}}}\,. \qquad (11.41)$$

Якщо прийняти, що $H_{\text{в}} = H_{\text{н}} = H_0$, де $H_0$ - початковий гідродинамічний напір, рівняння можна записати у зниженнях напору:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{S}{B_{\text{у}}^2} = \frac{1}{a_n}\frac{\partial S}{\partial t}, \qquad (11.42)$$

де $S$ - зниження рівня в будь-якій точці з координатою $r$ в момент часу $t$.

Це рівняння було розв'язане Ч. Джейкобом та М. Хантушем за умови сталого дебіту свердловини. Розв'язок має такий вигляд:

$$S = \frac{Q}{4\,\pi\,T} W_n\left(u; \frac{r}{B}\right), \qquad (11.43)$$

$$u = \frac{r^2}{4\,a_n\,t}. \qquad (11.44)$$

Функція $W_n\left(u; \frac{r}{B}\right)$ має назву *функції свердловини для пластів із перетіканням.* Вона визначається за допомогою спеціальних таблиць або графіків.

Якщо проаналізувати функцію $W_n\left(u; \frac{r}{B}\right)$ можна встановити, що при $t \longrightarrow \infty$ $u = 0$:

$$W_n\left(0, \frac{r}{B}\right) = 2\,k_0\left(\frac{r}{B}\right), \qquad (11.45)$$

де $k_0\left(\frac{r}{B}\right)$ – відома з математики функція Бесселя II роду нульового порядку (визначається за допомогою таблиць). Звідси витікає, що існує гранична стаціонарна п`єзометрична воронка, яка описується залежністю:

$$S = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot T}\,k_0\left(\frac{r}{B}\right). \qquad (11.46)$$

Це рівняння було отримане М. Гіринським та О. Мятієвим. На практиці воно може бути використане, якщо:

$$\frac{a_n\,t}{B^2} > 2{,}5\,. \qquad (11.47)$$

При $\frac{r}{B} \leq 0{,}34$ з відносною похибкою до 5% можна припустити, що

$$k_0\left(\frac{r}{B}\right) = 0{,}116 - ln\frac{r}{B}. \qquad (11.48)$$

Тоді розв'язок диференціального рівняння (11.42) має вигляд:

$$S = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot T} \left(0{,}116 - ln \frac{r}{B}\right), \qquad (11.49)$$

$$S = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot T} \; ln \frac{1{,}12B}{r}. \qquad (11.50)$$

Зниження безпосередньо у свердловині визначається наступним чином:

$$S_c = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot T} \; ln \frac{1{,}12\,B}{r_c}. \qquad (11.51)$$

Зазначимо, що при $\frac{r}{B} \leq 0{,}34$ рівняння кривої депресії має вигляд, який фактично співпадає з виразом для усталеної фільтрації:

$$S_c - S = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot T} \; ln \frac{r}{r_c}. \qquad (11.52)$$

Тобто, у зоні $r \leq 0{,}34\,B$ перетікання не змінює форму воронки депресії, і тут можна використовувати всі залежності для умов ізольованого пласта.

## Дія досконалої свердловини в необмеженому безнапірному потоці при сталому дебіті

На відміну від напірного потоку, процес формування депресійної воронки в безнапірному потоці ускладняється дією трьох чинників.

1. Порушення одномірності течії. Причина полягає в тому, що гравітаційна водовіддача, на відміну від пружної, не розповсюджується на весь пласт, а має місце лише на межі вільної поверхні. Тому виникає вертикальна складова фільтрації.

2. Гравітаційна водовіддача зростає поступово в часі. Це обумовлене розтягуванням капілярної зони при зниженні вільної поверхні потоку.

3. Зміна товщини (відповідно, і водопровідності) потоку при зменшенні гідродинамічного напору.

Ці чинники приводять до аномального, у порівняні з напірним потоком, режиму формування воронки депресії. На типовому графіку зниження гідродинамічного напору у будь-якій точці можна виділити три періоди (див. рис. 11.5):

*1-й період.* Період пружно-гравітаційного режиму.

*2-й період.* Період несправжнього стаціонарного режиму.
*3-й період.* Період гравітаційного режиму.

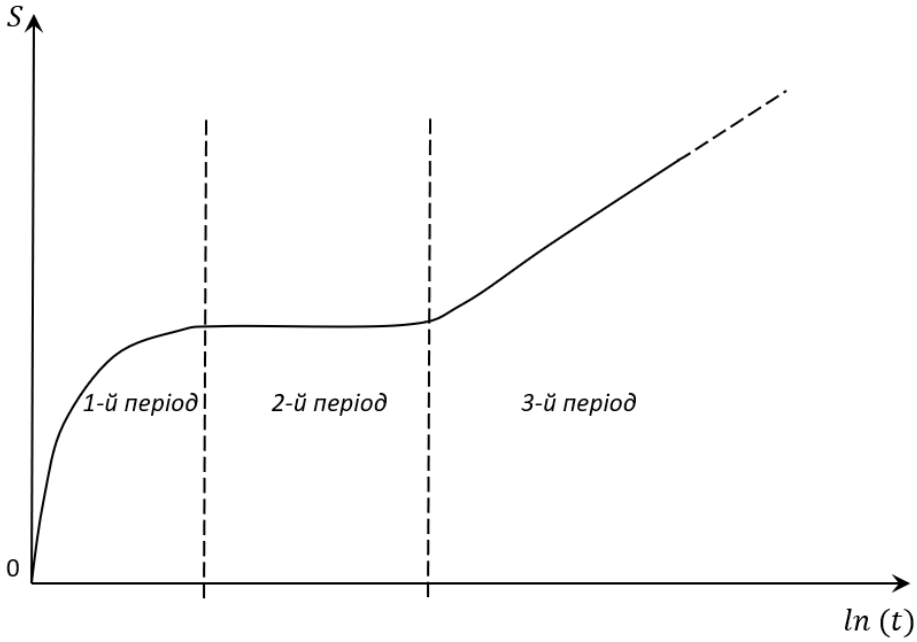


Рис. 11.5 Типовий графік зниження гідродинамічного напору при відкачуванні в безнапірному пласті

На початку періоду 1, головним чином, має місце пружна водовіддача, а потім починається дія гравітаційної водовіддачі. За цей час гідродинамічний напір у кожному перетині по вертикалі дуже змінюється. Причому зниження рівня вільної поверхні буде меншим, ніж середнє зниження напору в даному перетині; зниження напору тут описується залежністю Тейса. Далі, коли вплив гравітаційної водовіддачі стає відчутним, зниження напору уповільнюється в порівнянні з розрахунковим (по Тейсу). У деякий момент часу уповільнення приведе до того, що зниження напору на графіку $S = ln\ (t)$ буде майже непомітним. Тоді наступає період несправжнього стаціонарного режиму (період 2). Цей період існує завдяки стану тимчасової динамічної рівноваги. Така рівновага виникає тому, що дебіт свердловини забезпечується збільшенням гравітаційної водовіддачі. Потім настає період 3, коли гравітаційна водовіддача досягла граничної величини (стабілізувалася).

Для періоду 3 можна застосувати залежність Тейса, якщо замість коефіцієнта п`єзопровідності ($a_n$) застосувати коефіцієнт рівнепровідності ($a_p$), а замість коефіцієнта пружної водовіддачі пласта ($\mu^*$) - коефіцієнт гравітаційної водовіддачі породи ($\mu$). Формальна база для цього обґрунтована в темі 6.

Але, як відомо, $a_p = \frac{k\, h_{сер}}{\mu}$. Тобто необхідно спочатку визначити $h_{сер}$ , тому що реальна товщина потоку змінюється у просторі і часі).

Для визначення $h_{сер}$ С. Авер`янов запропонував таку залежність:

$$h_{сер} = \frac{h_{max}+h_{min}}{2}, \qquad (11.53)$$

де $h_{max}$ та $h_{min}$ – відповідно максимальна та мінімальна товщини потоку.

М. Веригін пропонує іншу залежність, яка, на його думку, є більш точною:

$$h_{сер} = \frac{h_0+h_c+h_1}{3}, \qquad (11.54)$$

де $h_0$ - товщина потоку у свердловині до відкачування; $h_c$ - товщина потоку у свердловині при відкачуванні (мінімальна); $h_1$ - товщина потоку на контурі живлення.

Введення поняття $h_{сер}$ показує, що розрахунки безнапірних потоків за допомогою формули Тейса є *наближеними.* Вони будуть точнішими, якщо відношення $\frac{S}{h_0}$ буде зменшуватися.

**Принципи розрахунку свердловин при змінному дебіті**

Якщо дебіт свердловини при відкачуванні є змінним, а потік має сталу водопровідність, для розрахунку можна застосовувати *метод суперпозиції*. Підставою для цього є те, що рух води в такому потоці описується лінійним диференціальним рівнянням.

Припустимо, що свердловина діє в ізольованому необмеженому напірному потоці із сталою водопровідністю. Причому дебіт свердловини змінюється в часі ступінчасто (див. рис. 11.6).

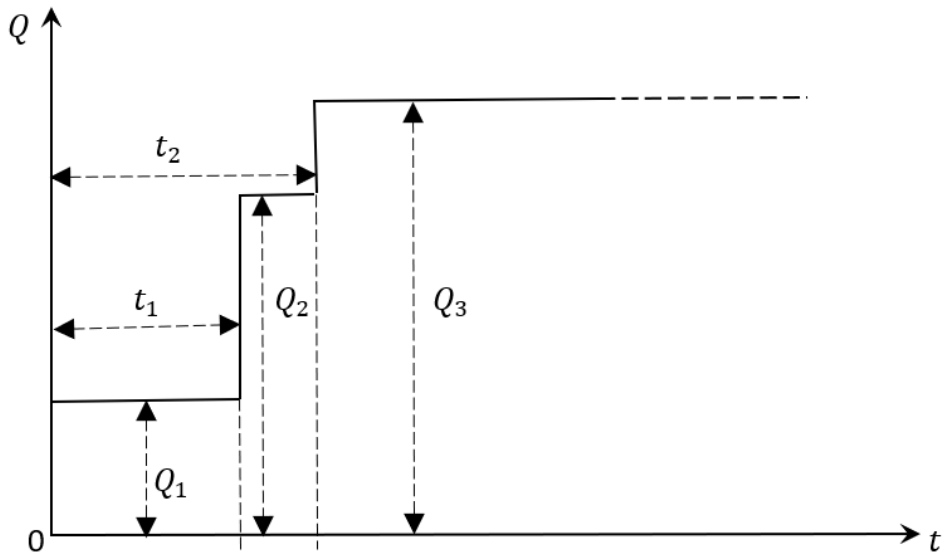


Рис. 11.6 Графік зміни дебіту свердловини в часі

Для першого ступеня зміна дебіту (при $t < t_1$):

$$S_{r,t<t_1} = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot T} W(u_1)\ , \qquad (11.55)$$

$$u_1 = \frac{r^2}{4\ a_n\ t}\ . \qquad (11.56)$$

Для другого ступеня (при $t_1 < t < t_2$) розв`язок можна отримати, якщо «накласти» два відкачування: одне з дебітом $Q_1$ та друге з додатковим дебітом другого ступеня $\Delta Q_2 = Q_2 - Q_1$. Причому початок дії другого відкачування відповідає кінцю дії терміну часу $t_1$. Тоді маємо:

$$S_{r,t_1<t<t_2} = \frac{Q_1}{4\ \pi\ T} W(u_1) + \frac{\Delta Q_2}{4\ \pi\ T} W(u_2)\ , \qquad (11.57)$$

$$u_1 = \frac{r^2}{4\ a_n\ t}; u_2 = \frac{r^2}{4\ a_n\ (t-t_1)}\ . \qquad (11.58)$$

Відповідно для третього ступеня (при $t > t_2$ ) маємо:

$$S_{r,t>t_2} = \frac{Q_1}{4\ \pi\ T} W(u_1) + \frac{\Delta Q_2}{4\ \pi\ T} W(u_2) + \frac{\Delta Q_3}{4\ \pi\ T} W(u_3)\ , \qquad (11.59)$$

$$u_1 = \frac{r^2}{4\ a_n\ t}; u_2 = \frac{r^2}{4\ a_n\ (t-t_1)}; u_3 = \frac{r^2}{4\ a_n\ (t-t_2)}\ , \qquad (11.60)$$

$$\Delta Q_2 = Q_2 - Q_1;\ \Delta Q_3 = Q_3 - Q_2. \qquad (11.61)$$

## Принципи розрахунку свердловин при заданому зниженні

Режим відкачування, при якому зниження рівня у свердловині $S_c$ не є сталим, приводить до того, що дебіт змінюється в часі.

Для дуже приблизної оцінки зміни дебіту свердловини у часі Ф. Бочевер рекомендував застосовувати залежність Тейса, допустивши стале зниження напору в свердловині.

Для більш точного розрахунку Ф. Бочевер, за допомогою перетворень Лапласа, отримав залежності для визначення дебіту свердловини $Q$ та зниження гідродинамічного напору $S$ у часі:

$$Q = 4\,\pi\,T\,S_c\,W_S(f_c);\, f_c = \frac{a_n\,t}{r^2}\,, \qquad (11.62)$$

$$S = S_c\,R_n\left(f_c, \frac{r}{r_c}\right). \qquad (11.63)$$

Функції $W_S(f_c)$ та $R_n\left(f_c, \frac{r}{r_c}\right)$ визначаються за допомогою відповідних спеціальних графіків або таблиць.

## Принципи врахування прямолінійних меж водоносних пластів у плані

В обмеженому водоносному пласті межі суттєво впливають на дію свердловини. Для визначення зниження гідродинамічного напору при відкачуванні із свердловини з постійним дебітом з урахуванням прямолінійних меж застосовують метод *дзеркальних відображень* у сукупності з методом *накладання течій.*

Суть методу дзеркальних відображень полягає в тому, що при розгляді задачі застосовують деякі фіктивні свердловини, які розташовані за межами водоносного горизонту. Відстань від межі та дебіти таких фіктивних свердловин такі ж самі, як і в реальних. Тобто, фіктивна свердловина являє собою дзеркальне відображення реальної. Розглянемо застосування цього методу на прикладах.

*Приклад 1*. Одиночна досконала свердловина в напівобмеженому потоці, на межі якого існує гранична умова I роду ($H = const$).

У цьому випадку застосовується фіктивна свердловина, в яку проводиться нагнітання з витратою, що дорівнює дебіту реальної свердловини (див. рис. 11.7).

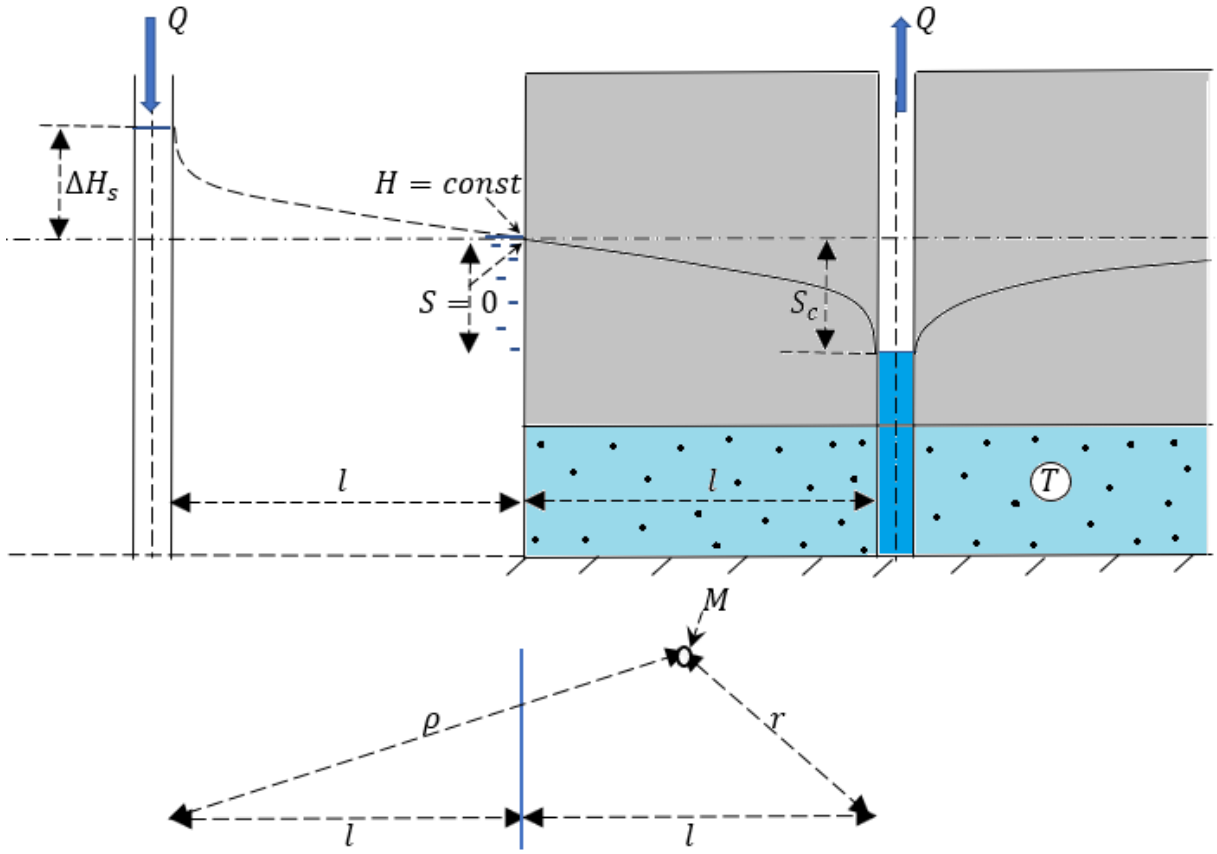


Рис. 11.7 Схема до розрахунку дії одиночної досконалої свердловини в напівобмеженому потоці, на межі якого існує гранична умова I роду ($H = const$)

Для такої спареної системи свердловин, враховуючи принцип суперпозиції, зниження напору в будь-якій точці $M$ на відстані $r$ від свердловини зменшується на величину підвищення напору в точці $\Delta H'$ від дії фіктивної свердловини, яка розташована на відстані $\rho$.

Підвищення напору $\Delta H'$ складає:

$$\Delta H' = -\frac{Q}{4\,\pi\,T} W(u'); \qquad (11.64)$$

$$u' = \frac{\rho^2}{4\,a_n\,t}. \qquad (11.65)$$

Тоді загальне зниження напору в точці $M$ буде:

$$S = \frac{Q}{4\,\pi\,T} W(u) - \frac{Q}{4\,\pi\,T} W(u') = \frac{Q}{4\,\pi\,T}[W(u) - W(u')]; \qquad (11.66)$$

$$u = \frac{r^2}{4\,a_n\,t}; u' = \frac{\rho^2}{4\,a_n\,t}. \qquad (11.67)$$

Якщо режим фільтрації є квазістаціонарним (при $u < 0{,}1$ та $u' < 0{,}1$):

$$S = \frac{Q}{4\,\pi\,T}\left(ln\frac{2{,}25\,a_n\,t}{r^2} - ln\frac{2{,}25\,a_n\,t}{\rho^2}\right) = \frac{Q}{2\,\pi\,T}\,ln\frac{\rho}{r}\,. \qquad (11.68)$$

*Приклад 2.* Одиночна досконала свердловина в напівобмеженому потоці, на межі якого існує гранична умова II роду $(q = 0)$.

У цьому випадку застосовується фіктивна свердловина, з якої ведеться відкачування з дебітом, що дорівнює дебіту реальної свердловини (див. рис. 11.8).

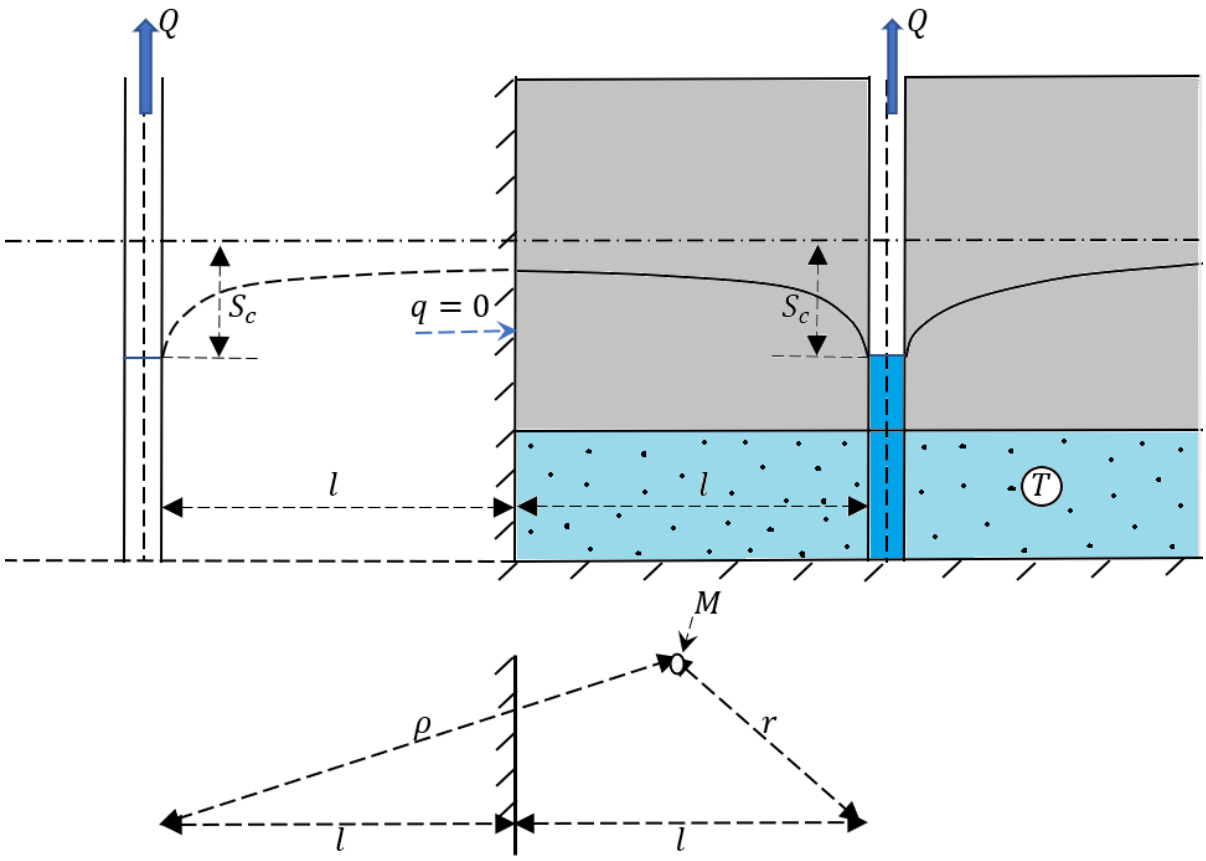


Рис. 11.8 Схема до розрахунку дії одиночної досконалої свердловини в напівобмеженому потоці, на межі якого існує гранична умова II роду $(q = 0)$

Загальне зниження напору в точці $M$ становить:

$$S = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot T}\left[W(u) + W(u')\right], \qquad (11.69)$$

$$u = \frac{r^2}{4\,a_n\,t};\, u' = \frac{\rho^2}{4\,a_n\,t}\,. \qquad (11.70)$$

Якщо режим фільтрації є квазістаціонарним:

$$S = \frac{Q}{4\,\pi\,T}\left(ln\frac{2{,}25\,a_n\,t}{r^2} + ln\frac{2{,}25\,a_n\,t}{\rho^2}\right) = \frac{Q}{2\,\pi\,T}\,ln\frac{2{,}25\,a_n\,t}{r\,\rho}\,. \qquad (11.71)$$

Застосування такого підходу можливе для більш складних випадків, коли обмежений водоносний пласт являє собою смугу чи кут.

**Врахування недосконалості свердловин**

У безнапірному потоці поблизу досконалої свердловини на відстані, яка приблизно дорівнює потужності потоку, має місце значне відхилення ліній рівного напору від вертикального положення. Це призводить до виникнення ділянки витікання висотою $\Delta h_c$ (див. рис. 9):

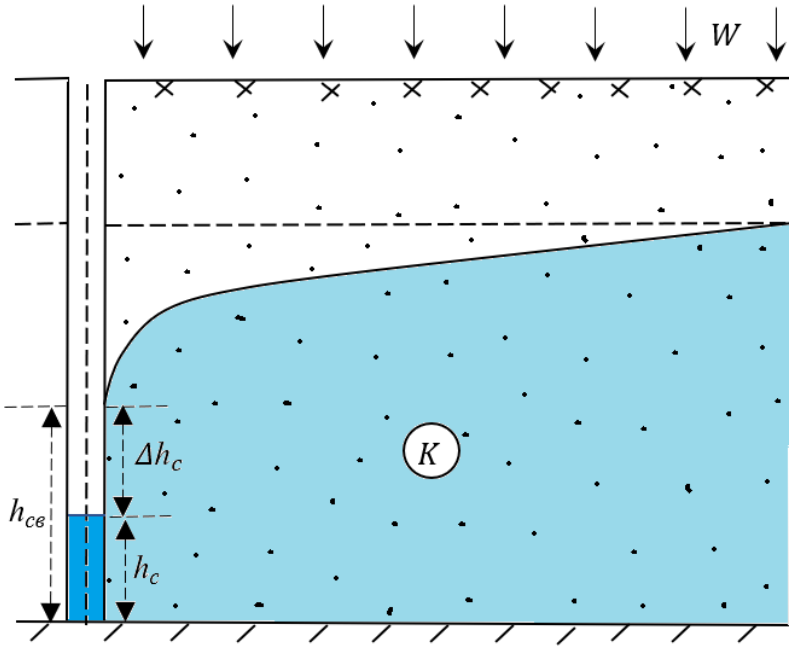


Рис. 11.9 Схема до врахування ділянки витікання поблизу досконалої свердловини

Тому у формулі Дюпюі для розрахунку свердловин при усталеному режимі фільтрації слід використовувати товщину потоку на зовнішній стінці свердловини:

$$h_{св} = h_c + \Delta h_c\,. \qquad (11.72)$$

Величина $\Delta h_c$ залежить від радіуса свердловини, рівня води у свердловині та дебіту свердловини і визначається за допомогою залежностей, які запропоновані М. Гіринським, С. Абрамовим, І. Чарним, В. Шестаковим та ін. Найбільш обґрунтованою є залежність В. Шестакова:

$$\Delta h_c = \sqrt{\left(0{,}73\ lg\frac{\sqrt{\frac{Q}{K}}}{r_c} - 0{,}5\right)\frac{Q}{k} + h_c^2} - h_c\ . \qquad (11.73)$$

Недосконалість свердловини викликає додатковий опір руху води. При однаковій величині зниження гідродинамічного напору та інших рівних умовах дебіт недосконалої свердловини буде меншим, ніж дебіт досконалої.

Для врахування *недосконалості свердловини за ступенем розкриття* водоносного горизонту існує декілька способів.

*Перший спосіб.* Базується на застосуванні в розрахунках поправки на недосконалість, яка має назву «коефіцієнт недосконалості». Коефіцієнт недосконалості - це відношення дебіту недосконалої свердловини до дебіту досконалої в аналогічних умовах. Коефіцієнт визначається за допомогою емпіричних залежностей.

*Другий спосіб.* Базується на приблизних аналітичних розв'язках диференціальних рівнянь фільтрації. Існують розрахункові залежності для різних гідродинамічних умов.

Нині 1 та 2 способи практично не застосовуються.

*Третій спосіб.* Базується на визначенні додаткового опору на недосконалість. У цьому випадку, за пропозицією І. Чарного, область фільтрації поділяють на два фрагменти. Внутрішній фрагмент обмежується радіусом, який дорівнює товщині пласта ($r = m$). Зовнішній фрагмент знаходиться в межах $< m < r < R_y$, де $R_y$ – усталений радіус впливу свердловини. Гідродинамічні напори на зовнішньому контурі, межі фрагментів та у свердловині позначаються відповідно $H_0$, $H'$ та $H_c$.

Для зовнішнього фрагмента справедливим є рівняння Дюпюі:

$$H_0 - H' = \frac{Q}{2\,\pi\,T}\,ln\frac{R_y}{m}\,. \qquad (11.74)$$

Для внутрішнього фрагмента можна записати:

$$H' - H_c = \frac{Q}{2\,\pi\,T}\left(ln\frac{m}{r_c} + \xi_1\right), \qquad (11.75)$$

де $\xi_1$ - додатковий опір, який враховує недосконалість свердловини за ступенем розкриття.

Сумарні втрати гідродинамічного напору можна визначити, якщо скласти два попередніх вирази:

$$H_0 - H_c = \frac{Q}{2\,\pi\,T}\left(ln\frac{R_y}{r_c} + \xi_1\right). \qquad (11.76)$$

Для визначення дебіту свердловини маємо:

$$Q = \frac{2\,\pi\,T\,S_c}{ln\frac{R_y}{r_c}+\xi_1}. \qquad (11.77)$$

Додатковий опір $\xi_1$ визначається за допомогою відповідних спеціальних графіків. Він залежить від місця знаходження фільтра недосконалої свердловини у водоносному пласті.

*Четвертий спосіб*. Базується на визначенні фіктивного розрахункового радіуса недосконалої свердловини. По суті він співпадає з 3-м способом.

$$H_0 - H_c = \frac{Q}{2\,\pi\,T}\left(ln\frac{R_y}{r_c} + \xi_1\right) = \frac{Q}{2\,\pi\,T}\,ln\frac{R_y}{r_{н.с.}}, \qquad (11.78)$$

де $r_{н.с.} = r_c\,e^{-\xi_1}$.

Для визначення дебіту свердловини:

$$Q = \frac{2\,\pi\,T\cdot}{ln\frac{R_y}{r_c\,e^{-\xi_1}}}. \qquad (11.79)$$

На практиці нині застосовують способи 3 та 4.

*Недосконалість за характером розкриття пласта* має також назву *скін-ефекту*. Це важливий чинник, що впливає на продуктивність свердловини. Існують розрахункові залежності для визначення фільтраційного опору на недосконалість за характером розкриття $\xi_c$. Для визначення цієї величини треба знати коефіцієнт фільтрації та радіус присвердловинної зони, але на практиці вони невідомі. Тобто, задовільних практичних рекомендацій по визначенню $\xi_c$ на даний час не існує. Тому при визначенні повного додаткового опору на недосконалість свердловини $\xi = \xi_1 + \xi_c$ найчастіше приймають, що $\xi_c = 0$.

Якщо режим фільтрації є неусталеним, то, за рекомендацією М. Веригіна, замість $\xi_1$ застосовують:

$$\xi_{1,t} = \xi_1 - \xi_t\,, \qquad (11.80)$$

де $\xi_t$ - поправка на недосконалість, яка обумовлена впливом неусталеного руху.

Величина $\xi_t$ близька до нуля за умови, що:

$$\frac{r^2}{4\,a_n\,t} < 5 \text{ x } 10^{-5}\ . \qquad (11.81)$$

Тому на практиці найчастіше величиною $\xi_t$ нехтують та приймають, що $\xi_{1,t} \approx \xi_1$.

**Контрольні запитання**

1. Що називають вертикальними водозаборами?
2. Як класифікуються вертикальні водозабори за умовами розкриття водоносних пластів?
3. Що таке недосконалість за характером розкриття водоносного горизонту?
4. Які вертикальні водозабори є досконалими за ступенем розкриття водоносного горизонту?
5. Які вертикальні водозабори є недосконалими за ступенем розкриття?
6. Що таке дебіт свердловини (вертикального водозабору)?
7. Що таке статичний та динамічний рівні води у свердловині?
8. Що таке радіус впливу свердловини?
9. Що таке депресійна та п’єзометрична воронки?
10. Як вигляд має рівняння усталеної фільтрації до одиночної свердловини, яка діє в ізольованому напірному пласті?
11. Як виконується розв’язання рівняння усталеної фільтрації до одиночної свердловини, яка діє в ізольованому напірному пласті?
12. Як виконується перехід від розрахунку гідродинамічних напорів до розрахунку зниження гідродинамічного напору в ізольованому пласті при усталеній фільтрації під дією одиночної досконалої свердловини?
13. Який вигляд має формула Дюпюї для свердловини в умовах безнапірного потоку на горизонтальному водотриві при усталеному режимі фільтрації?
14. Який вигляд має формула Дюпюї для свердловини в умовах горизонтального однорідно-шаруватого потоку при усталеному режимі фільтрації?
15. Які фактори впливають на формування п’єзометричної поверхні при неусталеній фільтрації до свердловини в напірному водоносному пласті?
16. Назвіть основні режими відкачування води з свердловин, для яких виконуються гідродинамічні розрахунки?
17. Який вигляд має розв’язок рівняння неусталеної фільтрації до свердловини в ізольованому напірному пласті?
18. Що являє собою функція свердловини $W(u)$ (well - функція по Ч.Тейсу)?
19. Що означає поняття неусталеного радіусу впливу свердловини?
20. Що таке квазістаціонарний режим фільтрації?

21. Чому попередні вирази, які отримані для необмеженого ізольованого напірного пласта при неусталеній фільтрації, не можна застосовувати для неоднорідно-шаруватих пластів?
22. В чому полягають принципи розрахунків одиночних свердловин при неусталеній фільтрації в неоднорідно-шаруватих напірних пластах?
23. В чому полягають принципи розрахунків одиночних свердловин при змінному в часі дебіті?
24. В чому полягає принцип врахування прямолінійних в плані меж пласта?
25. Які чинники впливають на процес формування депресійної воронки в безнапірних пластах?
26. Які періоди формування депресійної воронки спостерігаються в безнапірних пластах при неусталеному режимі фільтрації?

# ТЕМА 12. ФІЛЬТРАЦІЯ В ЗОНІ ВПЛИВУ ВЗАЄМОДІЮЧИХ СВЕРДЛОВИН (ГРУПОВИХ ВОДОЗАБОРІВ)

*Взаємодіючі свердловини* - це дві або декілька свердловин, дебіт яких зменшується при їх спільній роботі в порівнянні з дебітами, які б вони мали при одиночній дії та при однакових зниженнях гідродинамічного напору).

Взаємодія виникає тому, що воронки депресії окремих свердловин накладаються одна на одну. Тобто, свердловини розміщуються в межах зони впливу інших свердловин.

*Груповий водозабір* - це система або група взаємодіючих водозаборів.

Наслідком дії групового водозабору є створення загальної воронки депресії. Радіус такої воронки має назву *групового радіуса впливу*.

При оцінці експлуатаційних запасів підземних вод зазвичай розглядають водозабірні споруди, які складаються найчастіше з деякої кількості взаємодіючих свердловин. Тому питання розрахунку взаємодіючих свердловин є дуже актуальним.

Фільтрація в зоні впливу взаємодіючих свердловин може бути розглянута за двох умов.

1. Дебіт свердловин є заданим. Тобто, $Q = f(t)$, як окремий випадок $Q = const$.

2. Зниження гідродинамічного напору у свердловині є заданим. Тобто, $S = f(t)$, як окремий випадок $S = const$.

У більшості випадків розглядається умова 1.

Якщо дебіт є заданим, розрахунок взаємодіючих свердловин полягає у визначенні зниження гідродинамічного напору $S_M$ в точці $M$ при роботі $n$ свердловин, кожна з яких має дебіт $Q_n$. При цьому застосовується метод суперпозиції.

Тоді розрахункова формула набуває такого вигляду:

$$S_M = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \,, \qquad (12.1)$$

де $S_M$ - зниження гідродинамічного напору в точці $M$ при спільній роботі $n$ свердловин; $\Delta S_i$ - зниження гідродинамічного напору, яке викликано роботою $i$ -тої свердловини, що впливає на зниження в точці $M$ та знаходиться від неї на відстані $r_i$ (див. рис. 12.1).

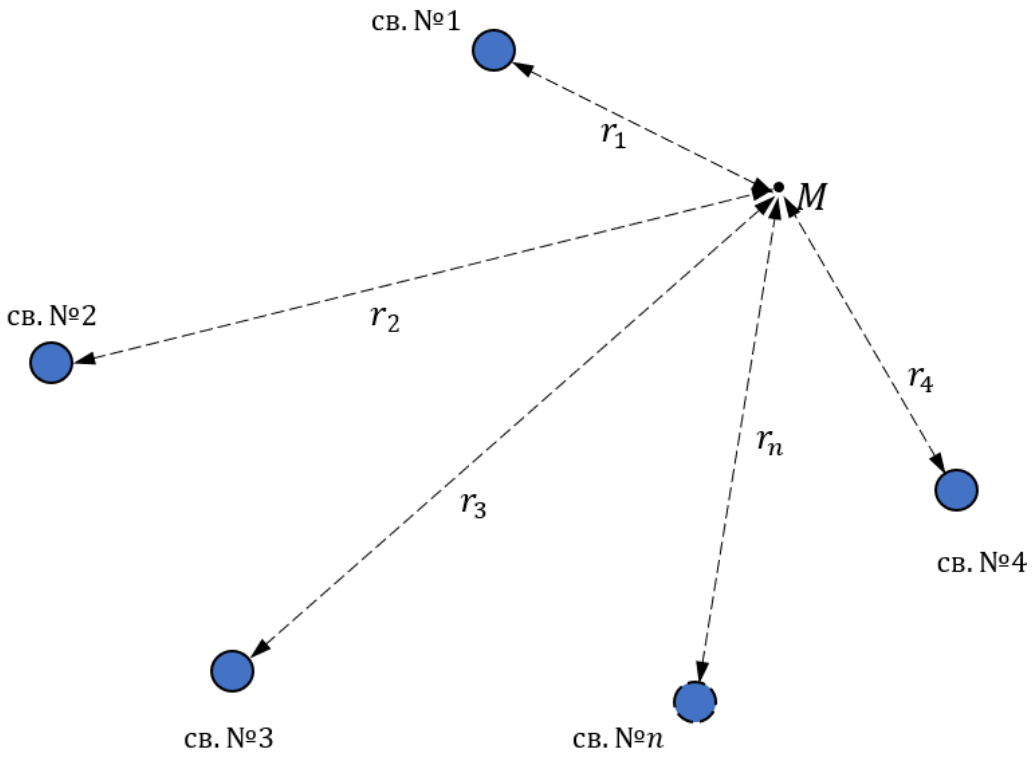


Рис. 12.1 Схема до розрахунку зниження гідродинамічного напору $S_M$ в точці $M$ при роботі $n$ свердловин, кожна з яких має дебіт $Q_n$

Слід звернути увагу, що таким самим чином можна визначити зниження гідродинамічного напору безпосередньо у конкретній свердловині при роботі $n$ свердловин. У такому разі точка $M$ співпадає з місцем розташування свердловини, а відстань $r_i$ від цієї свердловини до точки $M$ дорівнює радіусу свердловини $r_{\text{св}}$.

**Розрахунок взаємодіючих свердловин у необмеженому у плані водоносному пласті при сталому дебіті свердловин**

За таких умов розрахунок виконується переважно за допомогою методу розрахунку дискретних свердловин або методу великого колодязя.

*Метод розрахунку дискретних свердловин*. Для розрахунку зниження гідродинамічного напору в точці $M$ при спільній роботі $n$ свердловин в умовах необмеженого у плані однорідного ізольованого напірного потоку застосовують залежність, що отримана на основі формули (12.1) та залежності Тейса (див. тему 11):

$$S_M = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{4\,\pi\,T} W\left(\frac{r_i^2}{4\,a_n\,t_i}\right), \qquad (12.2)$$

де $Q_i$ – дебіт $i$ -тої свердловини, що впливає на зниження в точці $M$ та знаходиться від неї на відстані $r_i$; $t_i$ - розрахунковий час роботи $i$ -тої свердловини; $n$ - кількість свердловин.

Якщо режим фільтрації є квазістаціонарним ($\frac{r^2}{4\,a_n\,t} < 0{,}1$), маємо:

$$S_M = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{4\,\pi\,T}\, ln\, \frac{2{,}25\,a_n\,t_i}{r_i^2}\,. \qquad (12.3)$$

Таким самим чином можна отримати залежності для розрахунку зниження гідродинамічного напору в точці $M$ при спільній роботі $n$ свердловин в умовах необмеженого у плані неоднорідно-шаруватого пласта (див. тему 11).

*Метод великого колодязя*. Цей метод може бути використаний, якщо взаємодіючі свердловини розташовані по площі більш менш рівномірно. У такому разі розрахунок можна виконати, розглядаючи групу свердловин як «великий колодязь» з радіусом $r_{\text{к}}$.

Дебіт такого великого колодязя приймається рівним сумарному дебіту всіх свердловин. Далі розрахунок виконується за допомогою формули Тейса (див. тему 11). Зауважимо, що тут відстань $r$ визначається від геометричного центра «великого колодязя» (див. рис.12.2).

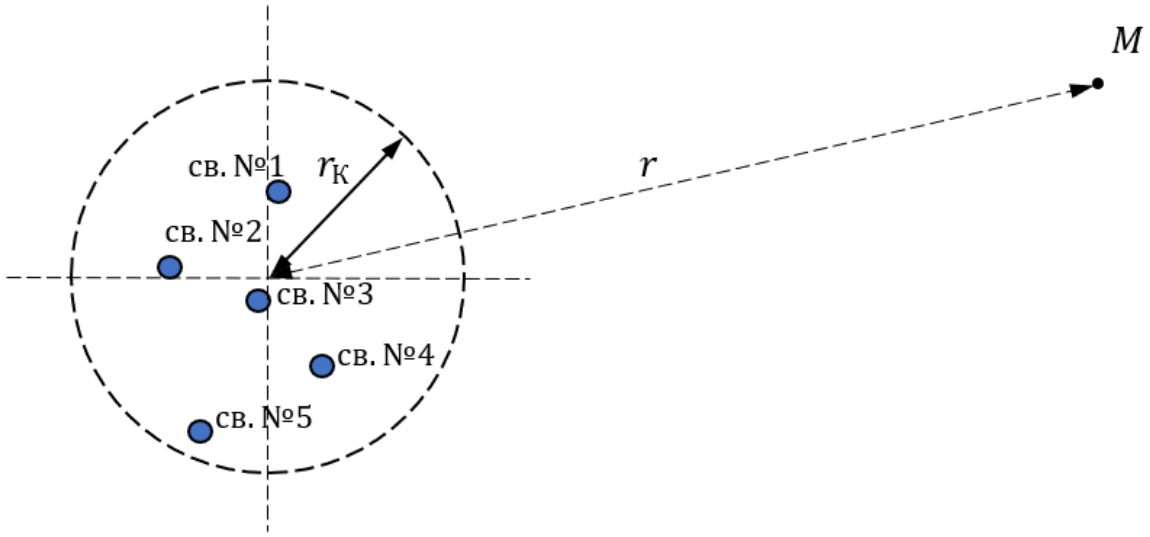


Рис. 12.2 Схема до застосування методу великого колодязя

Радіус великого колодязя $r_{\text{к}}$ визначається за допомогою формули:

$$r_{\text{к}} = \alpha\, \sqrt[2n]{F^{n-1}}\,, \qquad (12.4)$$

де $\alpha$ - коефіцієнт, що залежить від кількості свердловин $n$ і визначається за допомогою спеціального графіка; $F$ - площа, яку займають свердловини.

Приклад визначення площі $F$ для чотирьох свердловин наведений на рис. 12.3.

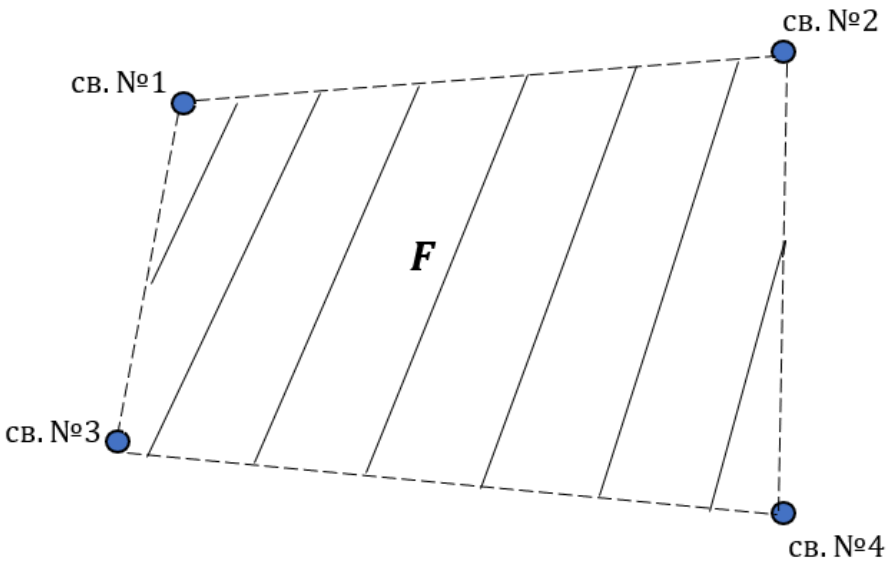


Рис. 12.3 Приклад визначення площі $F$ при застосуванні методу «великого колодязя»

Розраховане зниження гідродинамічного напору у великому колодязі дорівнює зниженню напору в геометричному центрі групи взаємодіючих свердловин за умови, що вони мають рівні дебіти. Тому за допомогою методу великого колодязя не можна визначити зниження напору в окремих взаємодіючих свердловинах на відміну від методу дискретних свердловин. За допомогою методу великого колодязя визначається лише зниження напору в точках, які є віддаленими від ділянки розташування взаємодіючих свердловин.

**Розрахунок взаємодіючих свердловин у необмеженому водоносному пласті при змінному дебіті свердловин**

Розрахунок свердловин при таких умовах також базується на застосуванні методу суперпозиції, але в цьому випадку зниження гідродинамічного напору в точці $M$ при спільній роботі $n$ свердловин в момент часу $t$ слід розглядати як функцію змінного дебіту $Q(t)$:

$$S_M = f[Q(t)]\,. \qquad (12.5)$$

Існують розрахункові залежності для визначення такого зниження, які отримані шляхом розв`язання диференціального рівняння за умови, що дебіт

свердловин змінюється або ступінчасто, або згідно з певним законом – лінійним, параболічним, експоненціальним.

## Розрахунок взаємодіючих свердловин при сталому зниженні гідродинамічного напору в свердловинах

При сталому зниженні гідродинамічного напору у свердловинах в умовах неусталеного руху воронка депресії весь час збільшується, відповідно зменшується напірний градієнт. Наслідком цього є зменшення дебіту свердловини в часі. Розв`язок для умов сталого зниження напору в одиночній свердловині отриманий Ф. Бочевером (див. тему 11).

Але в умовах сталого зниження гідродинамічного напору при розрахунках взаємодіючих свердловин не можна застосовувати метод суперпозиції. Річ у тому, що робота кожної свердловини викликає зниження гідродинамічного напору в інших свердловинах, тобто порушується загальна умова сталості зниження гідродинамічного напору.

Тому, коли у взаємодіючих свердловинах задані сталі зниження гідродинамічного напору, розрахунок виконується шляхом розв`язання системи рівнянь, кожне з яких записане відносно окремої $i$ -тої свердловини.

### Контрольні запитання

1. Що таке взаємодіючі свердловини?
2. Що таке групові водозабори?
3. Який математичний метод використовується при гідродинамічних розрахунках в зоні дії взаємодіючих свердловин?
4. Як виконується розрахунок взаємодіючих свердловин в необмеженому пласті при постійному дебіті свердловин?
5. У чому полягає суть методу розрахунку дискретних свердловин?
6. У чому полягає суть методу великого колодязя?
7. Чому дорівнює дебіт великого колодязя?
8. Чи можна за методом великого колодязя визначити зниження гідродинамічного напору в окремій свердловині?
9. Як виконується розрахунок взаємодіючих свердловин у необмеженому пласті при змінному дебіті свердловин?

# ТЕМА 13. ВИЗНАЧЕННЯ ГЕОФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПАРАМЕТРІВ ЗА ДАНИМИ РЕЖИМНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

Дані спостережень за рівнем або гідродинамічним напором підземних вод, які виконуються в спостережних свердловинах, можна використати для визначення геофільтраційних параметрів водопроникного середовища, крайових умов та побудови математичних моделей потоків підземних вод.

У теорії подібності такі задачі мають назву:

*інверсні* - визначення геофільтраційних параметрів;

*обернені* - визначення крайових умов;

*індуктивні* - визначення математичної моделі.

Якщо розглядати задачі геофільтрації, такий поділ на інверсні, обернені та індуктивні задачі є досить умовним, тому всі ці задачі можна назвати *оберненими*, тобто, задачі геофільтрації умовно поділяються на *прямі* та *обернені*.

*Пряма задача*: за відомими значеннями геофільтраційних параметрів та крайових умов за допомогою відповідних математичних моделей визначаються гідродинамічні напори та витрати потоків підземних вод (останні являють собою функції).

*Обернена задача*: за відомими значеннями функцій (гідродинамічних напорів та витрат потоку) визначаються геофільтраційні параметри, крайові умови та коригується математична модель геофільтрації потоку. Найчастіше визначаються саме геофільтраційні параметри.

Фактично будь-яку пряму задачу можна розглянути як обернену за певних умов отримання вихідної інформації. Далі розглянуті два приклади визначення геофільтраційних параметрів водопроникного середовища.

## Визначення величини інтенсивності живлення ґрунтових вод по площі

Наприклад, для визначення рівня ґрунтових вод в усталеному однорідному безнапірному потоці на горизонтальному водотриві використовується схема (див. тему 9), що наведена на рис. 13.1.

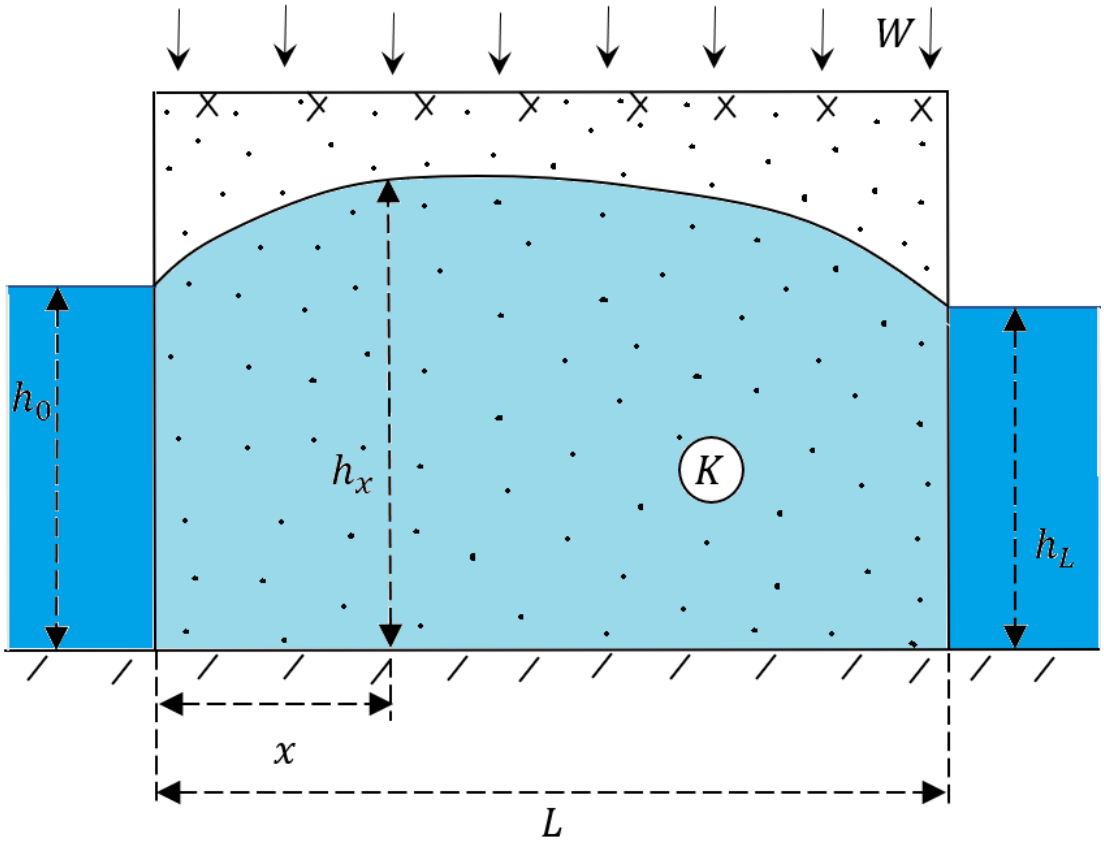


Рис. 13.1 Схема для визначення рівня ґрунтових вод в усталеному однорідному безнапірному потоці на горизонтальному водотриві

Залежність для визначення рівня підземних вод має вигляд:

$$h_x^2 = h_0^2 - \frac{h_0^2 - h_L^2}{L}\, x + \frac{W}{K}\,(L - x)\,. \qquad (13.1)$$

Якщо для такого потоку є результати спостережень за рівнем ґрунтових вод мінімум у трьох свердловинах, що розташовані вздовж напрямку руху потоку ґрунтових вод (див. рис. 13.2), для визначення інтенсивності живлення ґрунтових вод можна застосувати залежність (13.2), яка відповідає залежності (13.1).

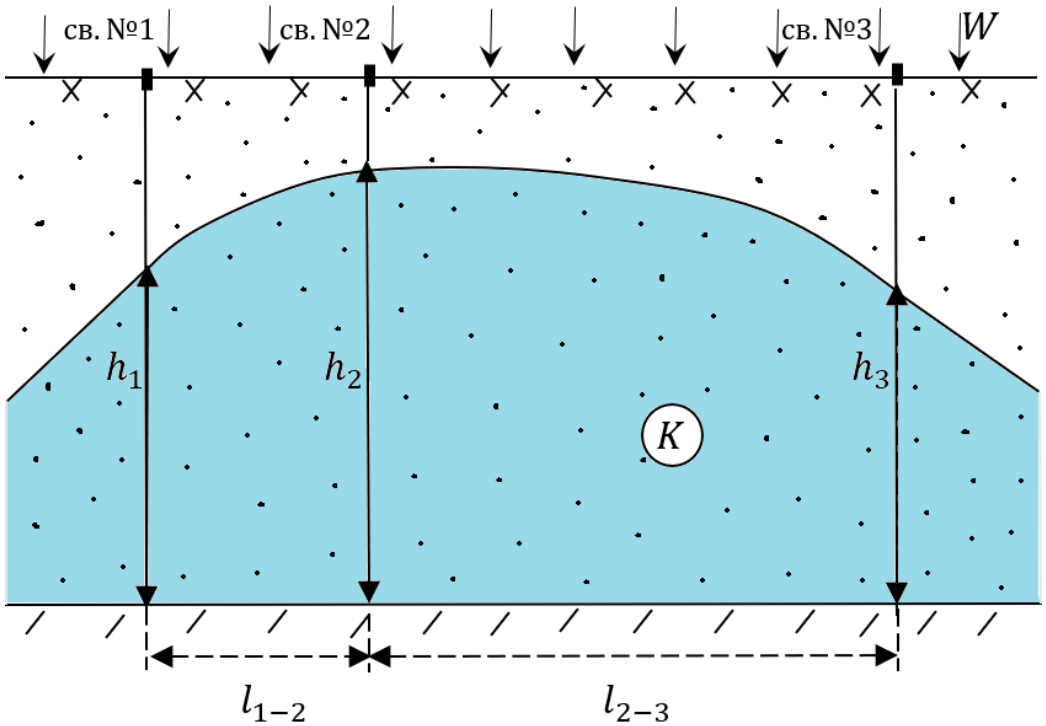


Рис. 13.2 Схема до визначення інтенсивності живлення ґрунтових вод по площі

$$h_2^2 = h_1^2 - \frac{h_1^2 - h_3^2}{l_{1-2} + l_{2-3}}\, l_{1-2} + \frac{W}{k}\, l_{1-2}\, l_{2-3}\,. \qquad (13.2)$$

Тоді у залежності (13.2) єдиним невідомим є комплексний параметр $\frac{w}{K}$. Його можна отримати шляхом простих алгебраїчних перетворень залежності (13.2):

$$\frac{W}{K} = \frac{h_2^2 - h_1^2}{l_{1-2}\, l_{2-3}} + \frac{h_1^2 - h_3^2}{(l_{1-2} + l_{2-3})\, l_{1-2}\, l_{2-3}}\,. \qquad (13.3)$$

За умови, що відоме значення коефіцієнта фільтрації $K$, можна легко визначити значення інтенсивності живлення підземних вод по площі $W$.

Інший приклад - усталений шматково-однорідний потік, в якому є два фрагменти з відомими коефіцієнтами водопровідності $T_{1-2}$ та $T_{2-3}$ (див. рис. 13.3).

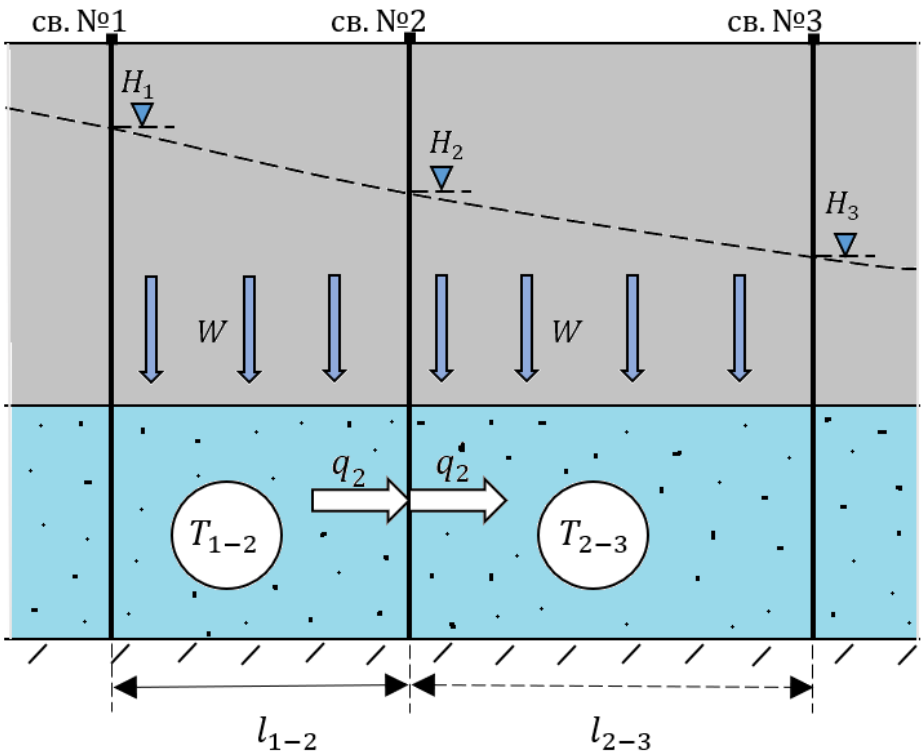


Рис. 13.3 Схема до визначення інтенсивності живлення підземних вод в усталеному шматково-однорідному потоці

Питомі витрати такого потоку в граничному перетині (свердловина №2 на рис.13.3) визначаються за допомогою відомих залежностей (див. тему 8):

$$q_0 = T\,\frac{H_0 - H_L}{L} - \frac{W\,L}{2}, \qquad (13.4)$$

$$q_L = T\,\frac{H_0 - H_L}{L} + \frac{W\,L}{2}. \qquad (13.5)$$

Для перетину свердловини №2 $q_2$ відповідає $q_0$, а $q_2'$ відповідає $q_L$, причому $q_2 = q_2'$. Тому можна записати:

$$q_2 = T_{1-2}\,\frac{H_1 - H_2}{l_{1-2}} + \frac{W\,l_{1-2}}{2}, \qquad (13.6)$$

$$q_2' = T_{2-3}\,\frac{H_2 - H_3}{l_{2-3}} - \frac{W\,l_{2-3}}{2}, \qquad (13.7)$$

$$T_{1-2}\,\frac{H_1 - H_2}{l_{1-2}} + \frac{W\,l_{1-2}}{2} = T_{2-3}\,\frac{H_2 - H_3}{l_{2-3}} - \frac{W\,l_{2-3}}{2}, \qquad (13.8)$$

$$W\,\frac{l_{1-2} + l_{2-3}}{2} = T_{2-3}\,\frac{H_2 - H_3}{l_{2-3}} - T_{1-2}\,\frac{H_1 - H_2}{l_{1-2}}. \qquad (13.9)$$

Тоді, якщо відомі $T_{1-2}$ та $T_{2-3}$, величина інтенсивності живлення підземних вод по площі $W$ визначається за залежністю:

$$W = 2\,\frac{T_{2-3}\,\frac{H_2-H_3}{l_{2-3}} - T_{1-2}\,\frac{H_1-H_2}{l_{1-2}}}{l_{1-2}+l_{2-3}}\,. \qquad (13.10)$$

**Визначання коефіцієнта рівнепровідності**

Визначення коефіцієнта рівнепровідності $a_p$ можливе, наприклад, для схеми напівобмеженого потоку, якщо є дані про зміну рівня на межі потоку $\Delta H^0$ та в спостережній свердловині $\Delta H_{x,t}$, що розташована поблизу цієї межі на відстані $x$ за час $t$ (див. рис. 13.4). Для цього можна застосовувати аналітичні залежності, які базуються на розв'язках, запропонованих В. Шестаковим.

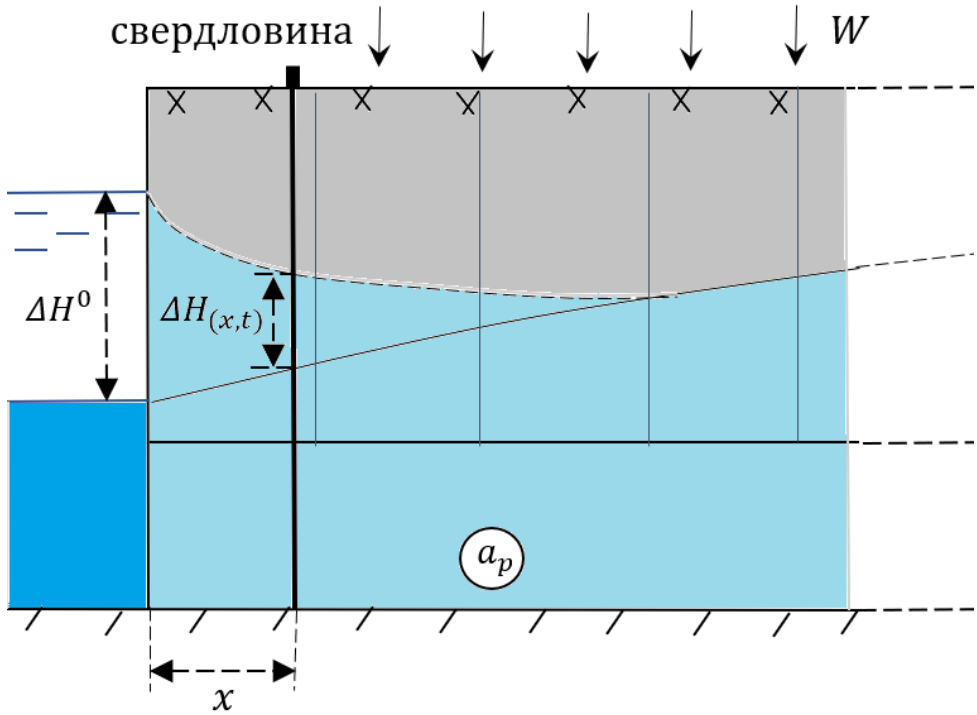


Рис. 13.4 Схема до визначення коефіцієнта рівнепровідності за допомогою аналітичної залежності В. Шестакова

Якщо рівень води на межі потоку змінюється миттєво (див. тему 9), можна записати:

$$\Delta H_{x,t} = \Delta H^0\, F(x,t)\,, \qquad (13.11)$$

$$F(x,t) = erfc(\lambda)\ , \qquad (13.12)$$

$$\lambda = \frac{x}{2\sqrt{a_p\, t}}\ . \qquad (13.13)$$

За відомими $\Delta H^0$ та $\Delta H_{x,t}$ визначається $erfc(\lambda)$:

$$erfc(\lambda) = \frac{\Delta H_{x,t}}{\Delta H^0}\ . \qquad (13.14)$$

Маючи значення $erfc(\lambda)$, за допомогою спеціальної таблиці визначаємо $\lambda$, а після цього розраховуємо коефіцієнт рівнепровідності $a_p$:

$$a_p = \frac{x^2}{4\,\lambda^2\, t}\ . \qquad (13.15)$$

**Контрольні запитання**

1. Що включає в себе поняття “параметр процесу фільтрації”?
2. Які гідрогеологічні параметри можна визначати за даними режимних спостережень?
3. Що таке прямі та обернені задачі фільтрації підземних вод?
4. Які режимні спостереження необхідно мати для визначення величини інтенсивності живлення ґрунтових вод по площі в умовах усталеної фільтрації?
5. Як визначається величина інтенсивності інфільтраційного живлення ґрунтових вод для схеми безнапірного потоку на горизонтальному водотривкому ложі в умовах усталеної фільтрації?
6. При яких умовах можливе визначення коефіцієнту рівнепровідності?
7. Які способи існують для визначення коефіцієнту рівнепровідності?
8. Як визначається коефіцієнт рівнепровідності способом В.Шестакова, якщо гідродинамічний напір на межі змінюється миттєво?

# ТЕМА 14. ВИЗНАЧЕННЯ ГЕОФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПАРАМЕТРІВ ЗА ДАНИМИ ДОСЛІДНО-ФІЛЬТРАЦІЙНИХ РОБІТ

## Загальні положення

До дослідно-фільтраційних робіт відносяться відкачування із свердловин, нагнітання у свердловини, наливи у шурфи. Основним видом дослідно-фільтраційних робіт є *відкачування*.

За даними відкачувань визначають головним чином *геофільтраційні параметри водоносних пластів*, а також умови на межах водоносних пластів, взаємозв`язок підземних і поверхневих вод, взаємозв`язок водоносних пластів між собою; отримують вихідні дані для виконання прогнозів за допомогою гідравлічних методів.

У залежності від *цільового призначення* відкачування поділяються на пробні, дослідні та дослідно-експлуатаційні.

У залежності від *наявності або відсутності спостережних свердловин* відкачування поділяються на одиночні та кущові. Як різновид кущових відкачувань виділяють також групові відкачування.

При пошаровому вивченні водоносних комплексів виконують поінтервальні відкачування, в окремих випадках відкачування-нагнітання.

*Пробні відкачування* призначені для отримання порівняльної попередньої характеристики фільтраційних властивостей порід, якості підземних вод та їхньої зміни по площі, а також для оцінки можливої продуктивності свердловин.

*Дослідні одиночні відкачування* виконуються при декількох ступенях дебіту для визначення залежності між дебітом свердловини та зниженням рівня у свердловині.

*Дослідні кущові відкачування* є основним видом дослідно-фільтраційних робіт. Вони виконуються для визначення геофільтраційних параметрів та граничних умов водоносних пластів.

*Дослідно-експлуатаційні відкачування* виконуються, головним чином, у складних гідрогеологічних умовах із метою визначення дослідним шляхом закономірностей зміни гідродинамічних напорів або дебіту в часі.

Сучасні методи визначення геофільтраційних параметрів за даними дослідно-фільтраційних робіт базуються переважно на рівняннях неусталеної фільтрації підземних вод. В окремих випадках такі параметри, як, наприклад, коефіцієнт водопровідності та додатковий опір на недосконалість ложа водотоків, можна визначити за допомогою рівнянь усталеної фільтрації (головним чином це формула Дюпюі, див. тему 11).

Використання рівнянь неусталеної фільтрації для визначення геофільтраційних параметрів обумовлене тим, що встановлення усталеного режиму фільтрації при відкачуванні потребує багато часу. Тобто відкачування буде відбуватися досить довго, отже, вартість робіт буде дуже значною. Крім того, за допомогою рівнянь усталеної фільтрації не можна визначити параметри, які характеризують ємнісні властивості гірських порід (коефіцієнти гравітаційної водовіддачі породи або пружної ємності пласта), відповідно не можна визначати комплексні параметри – коефіцієнти рівнепровідності або п'єзопровідності пласта.

Слід підкреслити, що існування недосконалості свердловин призводить до того, що визначення параметрів за даними одиночних відкачувань можна розглядати лише як наближене, а визначення параметрів за даними кущових відкачувань слід виконувати, застосовуючи дані зниження напору в спостережних свердловинах, виключаючи центральну (ту, з якої відбувається відкачування).

Відомо три найбільш розповсюджених метода визначення геофільтраційних параметрів за даними відкачування в умовах неусталеної фільтрації:

1) *метод підбору*;
2) *метод еталонної кривої*;
3) *метод або методи простеження (методи Тейса-Джейкоба)*.

Спільним для всіх методів є те, що вони базуються на використанні формули Тейса, отже, умови застосування методів повинні відповідати умовам застосування формули Тейса (див. тему 11).

На теперішній час для визначення геофільтраційних параметрів переважно використовують методи Тейса-Джейкоба.

## Метод підбору

Якщо при відкачуванні в спостережній свердловині, яка розташована на відстані $r$ від центральної свердловини, відомі зниження напору $S_1$ та $S_2$ в моменти часу $t_1$ та $t_2$, згідно формули Тейса можна записати:

$$S_1 = \frac{Q}{4\,\pi\,T}\,W\left(\frac{r^2}{4\,a_n\,t_1}\right), \qquad (14.1)$$

$$S_2 = \frac{Q}{4\,\pi\,T}\,W\left(\frac{r^2}{4\,a_n\,t_2}\right). \qquad (14.2)$$

Згідно умов застосування формули Тейса дебіт центральної свердловини $Q = const,$ також коефіцієнт водопровідності пласта $T = const.$ Тому, поділивши $S_2$ на $S_1$, маємо:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{W\left(\frac{r^2}{4\,a_n\,t_2}\right)}{W\left(\frac{r^2}{4\,a_n\,t_1}\right)}. \qquad (14.3)$$

У цій залежності нам відомі значення $S_2$, $S_1$, $r$, $t_2$, $t_1$. Тому коефіцієнт п'єзопровідності пласта $a_n$ можна визначити методом підбору.

Після визначення $a_n$ можна визначити коефіцієнт водопровідності пласта $T$ на основі залежності (14.1) або (14.2), а саме:

$$T = \frac{Q}{4\,\pi\,S_1} \cdot W\left(\frac{r^2}{4\,a_n\,t_1}\right) \qquad (14.4)$$

або

$$T = \frac{Q}{4\,\pi\,S_2} \cdot W\left(\frac{r^2}{4\,a_n\,t_2}\right). \qquad (14.5)$$

За необхідності пружну водовіддачу пласта $\mu^*$визначають так (див. тему 5):

$$\mu^* = \frac{T}{a_n}. \qquad (14.6)$$

**Метод еталонної кривої**

Якщо виконати логарифмування формули Тейса, отримуємо:

$$ln\,S = ln\left[\frac{Q}{4\,\pi\,T}W(u)\right], \qquad (14.7)$$

$$ln\,S = ln\frac{Q}{4\,\pi\,T} + ln\,W\,(u)\,. \qquad (14.8)$$

У результаті логарифмування величини $u = \frac{r^2}{4\,a_n\,t}$ будемо мати:

$$ln\,u = ln\left(\frac{r^2}{4\,a_n\,t}\right), \qquad (14.9)$$

$$ln\,u = ln\frac{1}{4\,a_n} + ln\frac{r^2}{t}. \qquad (14.10)$$

Слід звернути увагу, що величини $ln\,S$ та $ln\,W\,(u)$ відрізняються на величину $ln\frac{Q}{4\,\pi\,T}$, а величини $ln\,u$ та $ln\frac{r^2}{t}$ - на величину $ln\frac{1}{4\,a_n}$.

З цього факту випливає наступне. Якщо побудувати за даними відкачування реальний графік $ln\,S = f\left(ln\frac{r^2}{t}\right)$ та так звану еталонну криву $ln\,W\,(u) = f(ln\,u)$ за даними спеціальної таблиці well-функції $W(u) = f(u)$, див. тему 11, з`ясується, що графіки співпадають за умови, що осі координат здвинуті між собою на величини $ln\frac{Q}{4\,\pi\,T}$ та $ln\frac{1}{4\,a_n}$ (див. рис. 14.1).

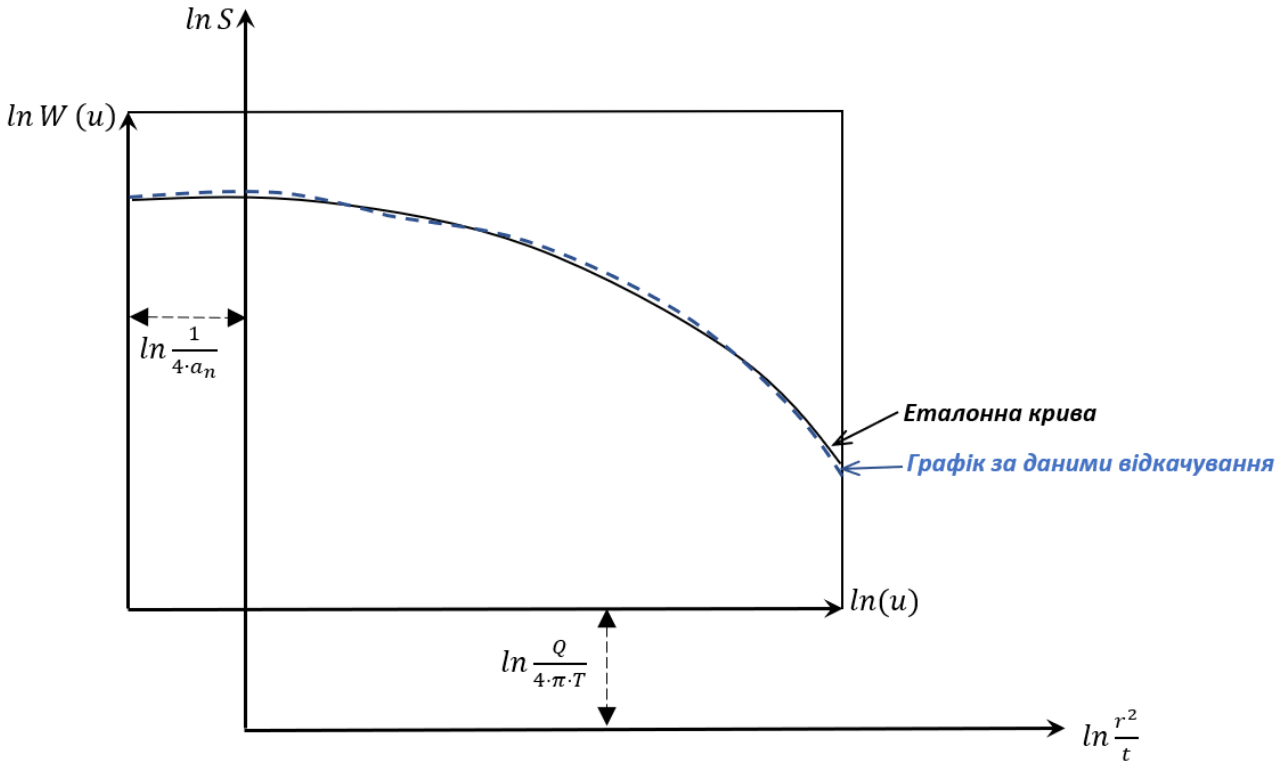


Рис. 14.1 Ілюстрація до визначення геофільтрайійних параметрів методом еталонної кривої

Тому визначення геофільтраційних параметрів методом еталонної кривої відбувається так. За даними відкачування отримують графік $ln\,S = f\left(ln\frac{r^2}{t}\right)$. Потім на нього накладають графік еталонної кривої, що побудований на прозорій основі, таким чином, щоб досягти найбільшої візуальної збіжності обох графіків без викривлення напрямків осей координат. За результатами накладання графіків визначають величини $ln\frac{Q}{4\,\pi\,T}$ та $ln\frac{1}{4\,a_n}$, а далі – шукані геофільтраційні параметри $T$ і $a_n$.

## Методи простеження

На відміну від методів підбору та еталонної кривої, методи простеження застосовуються лише за умови квазіусталеного режиму фільтрації (див. тему 11).

Для отримання залежностей, що використовуються для визначення геофільтраційних параметрів у методах простеження, формула Тейса записується у вигляді рівняння прямої в напівлогарифмічних координатах. У такому випадку можна запропонувати три варіанти простеження, а саме:

1) простеження за часом $S = ln\ (t)$;
2) простеження за площею $S = ln\ (r)$;
3) комбіноване простеження $S = ln\left(\frac{t}{r^2}\right)$.

*Простеження за часом.* Представимо формулу Тейса у такому вигляді:

$$S = \frac{Q}{4\,\pi\,T}\ ln\frac{2{,}25\ a_n\ t}{r^2}\,; \qquad (14.11)$$

$$S = \frac{Q}{4\,\pi\,T}\left(ln\frac{2{,}25\ a_n}{r^2} + ln\,t\right); \qquad (14.12)$$

$$S = \frac{Q}{4\,\pi\,T}\ ln\,t + \frac{Q}{4\,\pi\,T}\ ln\frac{2{,}25\ a_n}{r^2}\,. \qquad (14.13)$$

У виразі (14.13) позначимо: $C_t = \frac{Q}{4\,\pi\,T}$; $A_t = C_t\ ln\frac{2{,}25\ a_n}{r^2}$.

Тоді можна записати:

$$S = C_t\ \ ln\,t + A_t\,. \qquad (14.14)$$

Вираз (14.15) являє собою рівняння прямої за умови, що $r = const$. На графіку це виглядає так (див. рис. 14.2):

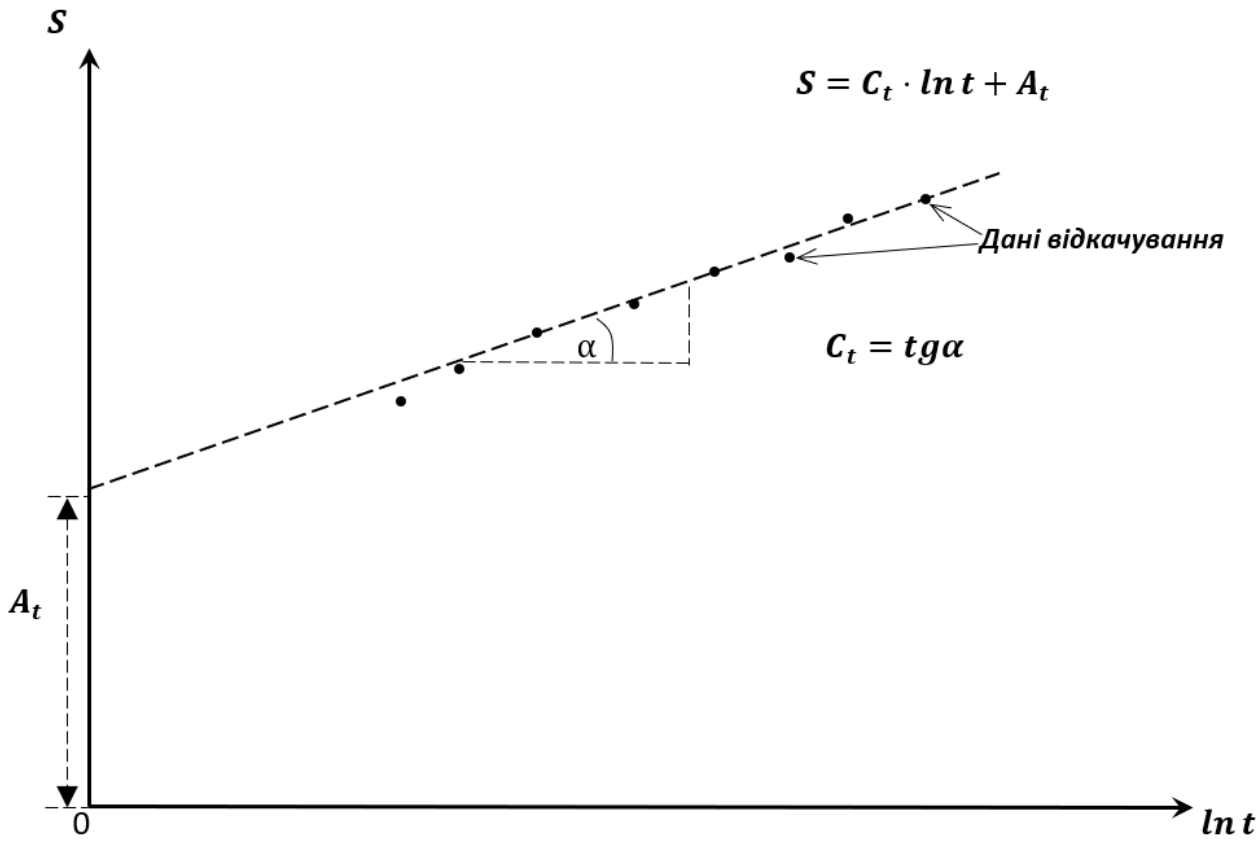


Рис. 14.2 Ілюстрація до застосування методу простеження за часом

З графіку (рис.14.2) легко визначити величини $C_t$ і $A_t$, а потім шукані геофільтраційні параметри $T$ і $a_n$.

*Простеження за площею.* Представимо формулу Тейса у такому вигляді:

$$S = \frac{Q}{4\,\pi\,T}\ ln\frac{2{,}25\ a_n\ t}{r^2}; \qquad (14.15)$$

$$S = \frac{Q}{4\,\pi\,T}\ ln(2\,,25\ a_n\ t) - \frac{2\,Q}{4\,\pi\,T}\ ln\,r\ . \qquad (14.16)$$

У виразі (14.16) позначимо: $C_r = \frac{Q}{2\,\pi\,T}$; $A_r = \frac{C_r}{2}\ ln(2\,,25\ a_n t)$.

Тоді можна записати:

$$S = C_r \cdot ln\,r - A_r\ . \qquad (14.17)$$

Вираз (14.17) являє собою рівняння прямої за умови, що $t = const$.

За допомогою побудованого графіка залежності (14.17) легко визначити величини $C_r$ і $A_r$, а потім шукані геофільтраційні параметри $T$ і $a_n$.

*Комбіноване простеження.* Представимо формулу Тейса у такому вигляді:

$$S = \frac{Q}{4\,\pi\,T}\ ln\frac{2{,}25\ a_n\ t}{r^2}\,; \qquad (14.18)$$

$$S = \frac{Q}{4\,\pi\,T}\ ln(2\,,25\ a_n) + \frac{Q}{4\,\pi\,T}\ ln\frac{t}{r^2}\,. \quad (14.19)$$

У виразі (14.16) позначимо: $C_k = \frac{Q}{4\,\pi\,T}$; $A_k = C_{\text{к}}\ ln(2\,,25\ a_n)$.

Тоді можна записати:

$$S = C_k\ \ ln\frac{t}{r^2} + A_k\,. \qquad (14.20)$$

Вираз (14.20) являє собою рівняння прямої відносно комбінованого параметра $\frac{t}{r^2}$.

За допомогою побудованого графіка залежності (14.20) легко визначити величини $C_k$ і $A_k$, а потім шукані геофільтраційні параметри $T$ і $a_n$.

Слід зазначити, що розглянуті методи простеження можна застосовувати для визначення геофільтраційних параметрів безнапірних пластів у випадку, коли зниження рівня води у центральній свердловині не перевищувати 20% від початкової потужності потоку.

## Порівняльний аналіз методів визначення геофільтраційних параметрів в умовах неусталеної фільтрації

Вважають, що найгіршим із трьох розглянутих методів визначення геофільтраційних параметрів є метод підбору. При його застосуванні практично не контролюється відповідність залежностей, що застосовуються, реальним природним умовам.

У методі еталонної кривої точність визначення параметрів обумовлена ступенем збіжності кривих. Цей ступінь збіжності визначається суб`єктивно.

Методи простеження не мають таких недоліків. Вони базуються на аналізі прямолінійних залежностей (що притаманні квазіусталеному режиму фільтрації), на яких більш надійно діагностується тип залежності та фіксуються моменти зміни типу залежності.

### Контрольні запитання

1. Які види гідрогеологічних робіт відносяться до дослідно-фільтраційних?

2. Які гідрогеологічні параметри можна визначити за даним дослідно-фільтраційних робіт?
3. Що таке відкачування?
4. Як поділяються відкачування в залежності від їх цільового призначення?
5. Як поділяються відкачування в залежності від наявності чи відсутності спостережних свердловин?
6. Що таке пробні відкачування?
7. Що таке дослідні одиночні та дослідні кущові відкачування?
8. Що таке дослідно-експлуатаційні відкачування?
9. Які методи використовуються для визначення гідрогеологічних параметрів за даними відкачувань?
10. У чому полягає суть методу підбору?
11. У чому полягає суть методу еталонної кривої?
12. Які методи простеження використовуються для визначення гідрогеологічних параметрів?
13. Які головні умови застосування методів простеження?
14. Як практично застосовується метод простеження за часом?

## ТЕМА 15. ОСОБЛИВОСТІ МІГРАЦІЇ У ПІДЗЕМНИХ ВОДАХ

У водному середовищі безперервно відбуваються фізико-хімічні зміни під впливом:

- фільтрації;
- зміни температури;
- зміни тиску;
- зміни концентрації сполук у воді та гірській породі.

У зоні активного водообміну (або верхнього гідродинамічного поверху) фізико-хімічні процеси не викликають суттєвих змін фізичних властивостей рідини, що фільтрується, та змін геофільтраційних параметрів середовища. Тому для зони активного водообміну можна застосовувати основні положення класичної динаміки підземних вод: фільтрація слабомінералізованої (прісної) води розглядається в середовищі зі сталими геофільтраційними параметрами в ізотермічних умовах.

Але на значних глибинах, а також при оцінці забруднення підземних вод, положення класичної динаміки підземних вод порушуються, а завдання значною мірою ускладнюються. За таких умов для розрахунку руху рідини необхідно застосовувати принципи та методи не лише геофільтрації, але також дифузії та хімічної кінетики. Такі питання розглядаються в *теорії міграції у підземних водах.*

*Міграція у підземних водах* - це процес переносу тепла та маси речовини у підземних водах. При цьому розглядається переміщення окремих часток рідини по порах та тріщинах гірських порід з урахуванням фізико-хімічних змін рідини та її складових компонентів. Фізико-хімічні зміни відбуваються при фільтрації за рахунок взаємодії рідини з гірськими породами та з іншими рідинами.

При розгляді процесів міграції у підземних водах слід враховувати стан середовища, в якому рухається рідина. У цьому зв`язку розрізняють *гравітаційні, елізійні та змішані* течії.

*Гравітаційні течії* обумовлені зміною по площі розповсюдження водоносних порід гідродинамічного напору, а також нерівномірним розподілом густини, температури та концентрації рідини у водоносному пласті.

*Елізійні течії* виникають за рахунок зміни об`ємів порового простору і рідини, що знаходиться в порах. Такий тип течії пов`язаний, наприклад, із механічним стисненням гірських порід під дією тектонічного тиску або під дією тиску за рахунок гірських порід, що залягають вище. Зміна об`єму порового простору виникає також за рахунок процесів мінералогічного перетворення середовища. Течії, що викликані зміною об`єму порового простору, мають назву *консолідаційних*.

*Змішані течії* - це такі течії, в яких гравітаційна та елізійна складові діють одночасно.

У подальшому будуть розглянуті лише закономірності гравітаційних течій.

Вважається, що існує два основних механізми міграції: фільтраційний (або конвекційний) та дифузійний (або кондуктивний).

*Фільтраційний перенос* - це перенос тепла і маси речовини потоком рідини, що рухається (фільтраційним потоком).

*Дифузійний перенос* - це перенос тепла і маси речовини дифузійним (молекулярним) шляхом у нерухомій рідині.

Зрозуміло, що у підземних водах мають місце одночасно як фільтраційний, так і дифузійний механізми міграції.

Але процеси міграції у підземних водах ускладнюються неоднорідністю пористого середовища. Тому тут має місце процес розсіювання маси речовини або тепла на межі рідин з різними концентраціями речовини або різною температурою внаслідок не лише молекулярної дифузії, но також і механічної дисперсії (так званої механічної дифузії). Процес розсіювання речовини або тепла в підземних водах на межі рідин з різними концентраціями речовини або різною температурою має назву *гідродинамічної дисперсії (гідродисперсії) або конвекційної дифузії*.

Важливо, що міграція у підземних водах відбувається в умовах зміни температури та концентрації сполук у рідині, внаслідок чого змінюються гідродинамічні властивості рідини, а саме її густина та в`язкість. Відповідно змінюються проникність середовища, параметри геофільтрації та міграції у підземних водах. Тому математичний опис процесу міграції у підземних водах є дуже складним. Наприклад, згідно з М. Веригіним, процес міграції у підземних водах описується системою з 12 диференціальних рівнянь. Знайти розв`язок такої системи практично неможливо.

Тому на практиці приймається, що параметри геофільтрації не залежать від процесу міграції. Тобто, густина і в`язкість рідини, а також проникність середовища не залежить від концентрації та температури. У ряді випадків із цим можна погодитися. Наприклад, М. Веригін встановив, що при зміні концентрації водних розчинів від 0 до 60 г/дм$^3$ густина розчину змінюється в межах 4%, а в`язкість - до 8%.

## Фільтраційний перенос

Як головну характеристику фільтраційного переносу застосовують *дійсну швидкість фільтрації підземних вод* $v_d$ (див. тему 2), яка пов`язана із швидкістю фільтрації $v$ співвідношенням:

$$v_d = \frac{v}{n_a}, \qquad (15.1)$$

де $n_a$ - активна пористість гірської породи.

Але фільтраційний перенос ускладнюється фізико-хімічними процесами, зокрема сорбцією розчинених речовин гірськими породами та розчиненням окремих компонентів гірських порід підземними водами, що враховується при фільтраційному переносі.

Як відомо, процеси сорбції характеризуються *сорбційною ємністю порід* $N$. Сорбційна ємність - це гранична кількість компонента, що сорбується в даних умовах, в одиниці об`єму породи при певній його концентрації у водному розчині $C$. Розмірність сорбційної ємності така ж сама, як і в концентрації розчину.

Теоретичні розробки, які знайшли практичне підтвердження, свідчать про те, що при невеликій концентрації компонента $C$ сорбційна ємність прямо пропорційна концентрації:

$$N = \frac{1}{\beta} C, \qquad (15.2)$$

де $\beta$ - коефіцієнт розподілу ($\beta = const$).

Якщо не враховувати зміну сорбційної ємності в часі (вважати, що сорбційна рівновага настає миттєво), то міграція у підземних водах може розглядатися за *схемою поршневого витіснення*. При цьому приймається, що всі частки розчину мігрують з однаковою швидкістю $v_d$.

Розглянемо для такої схеми вираз для швидкості руху фронту розчину з концентрацією $C$, який витісняє такий саме розчин із концентрацією $C^0$, з урахуванням сорбції розчину.

Для цього запишемо вираз для балансу солей в нескінченно малому елементі трубки течії $dl$, через який проходить фронт зміни концентрації розчину. Витрата потоку розчину дорівнює $Q$, час дорівнює $dt$, площа поперечного перерізу елемента - $\omega$ (див. рис. 15.1).

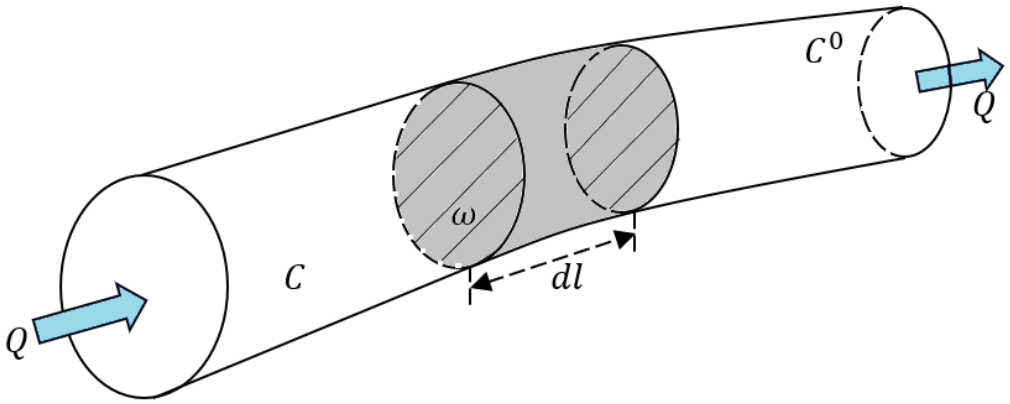


Рис. 15.1 Схема до визначення швидкості руху фронту розчину з концентрацією $C$, який витісняє такий саме розчин із концентрацією $C^0$, з урахуванням сорбції розчину

У такому разі в елемент надходить солей $(C\ Q\ dt)$, виходить $(C^0\ Q\ dt)$. У нескінченно малому елементі залишається солей в порах:

$$n_a\ \omega\ (C - C^0)\ dl\ , \tag{15.3}$$

а за рахунок сорбції породою:

$$\omega\ \Delta N\ dl\ , \tag{15.4}$$

де $\Delta N = N - N^0$ - зміна сорбційної ємності породи.

Тоді баланс солей в елементі має вигляд:

$$(C - C^0)\ Q\ dt = n_a\ \omega\ (C - C^0)\ dl + \omega\ \Delta N\ dl\ . \tag{15.5}$$

Звідси *швидкість руху розчину на фронті витіснення* $v_l$ складає:

$$v_l = \frac{dl}{dt} = \frac{Q}{\omega\left(n_a + \frac{\Delta N}{C - C^0}\right)} = \frac{v}{n_a + \frac{\Delta N}{C - C^0}}\ . \tag{15.6}$$

де $v$ - швидкість фільтрації.

Використаємо поняття *ефективної пористості ґрунту* $n_e$:

$$n_e = n_a + \frac{\Delta N}{C - C^0} = n_a + \frac{1}{\beta}\ . \tag{15.7}$$

Величина $n_e$ характеризує питому сумарну ємність породи для компонента розчину, що розглядається. Тоді:

$$v_l = \frac{v}{n_e}. \qquad (15.8)$$

Тобто, якщо процеси сорбції відбуваються миттєво, швидкість руху має ту ж саму структуру, що й дійсна швидкість фільтрації, але для врахування сорбції замість активної пористості використовують ефективну пористість.

Якщо скласти баланс тепла в нескінченно малому елементі трубки течії, з'ясується, що за допомогою попередньої формули можна визначити швидкість *фільтраційного теплопереносу* (рух межі розподілу рідини речовини з різною температурою). Тоді величина ефективної пористості буде пов`язана з тепловою ємністю водонасиченої породи $C_n$, скелета породи $C_{\text{ск}}$ та рідини $C_{\text{в}}$:

$$n_e = \frac{C_n}{C_{\text{в}}}, \qquad (15.9)$$

$$\mathrm{C}_n = n_a\, C_{\text{в}} + (1 - n_0)\, C_{\text{ск}}\, \frac{\gamma_{\text{ск}}}{\gamma}, \qquad (15.10)$$

де $\gamma_{\text{ск}}, \gamma$ - відповідно, питома вага скелета породи та питома вага насиченої рідиною породи.

Застосування поняття ефективної пористості дозволяє записати розрахункові залежності без прямого урахування взаємодії рідини і породи. Тут взаємодія враховується шляхом застосування замість активної пористості ефективної пористості $n_e$.

## Дифузійний перенос

У пористому середовищі дифузія має такі ж самі закономірності, що й у вільному середовищі, а саме: дифузійний потік $Q_D$ через поперечний переріз потоку $\omega$ у напрямку $l$ визначається відомим *законом Фіка*:

$$Q_D = -D_M\, \omega\, \frac{\partial C}{\partial l}, \qquad (15.11)$$

де $D_M$ - коефіцієнт молекулярної дифузії.

Для піщаних порід, наприклад,

$$D_M = \chi\, n_a\, \mu_{\text{м}}\, D_M^0\,, \qquad (15.12)$$

де $\chi$ - параметр, що характеризує звивистість шляхів фільтрації в пористому середовищі (для зцементованих пісків він складає 0,25...0,50, для незцементованих - 0,50...0,70), $n_a$ – активна пористість породи, $\mu_{\text{м}}$ – коефіцієнт, що враховує зменшення рухомості рідини у пристінних шарах пор породи, $D_M^0$ - коефіцієнт молекулярної дифузії у вільному середовищі.

Слід зазначити, що закон Фіка є справедливим, якщо процес ізотермічний, а дифузія незалежна. Інакше має місце явище неізотермічної багатокомпонентної дифузії, математичний опис якого є набагато складнішим.

**Гідродисперсія**

Дослідженнями встановлено, що гідродисперсія визначається тими ж самими залежностями, що і дифузійний перенос. Але замість коефіцієнта молекулярної дифузії в законі Фіка тут використовується коефіцієнт дисперсії $D$, який залежить від величини та напрямку швидкості фільтрації:

$$D = D_M + \delta_1\, v\,, \qquad (15.13)$$

де $v$ - швидкість фільтрації; $\delta_1$ - коефіцієнт, що залежить від типу ґрунту та напрямку фільтраційного потоку (наприклад, для дрібнозернистого однорідного піску він складає 0,1...1,0 см).

Аналогічним чином розглядається гідродисперсія при тепловому переносі у фільтраційному потоці. Тут значення сумарного коефіцієнта теплової передачі $\lambda$ складає:

$$\lambda = \lambda_0 + T_{\text{р}}\, \delta_1\, v\,, \qquad (15.14)$$

де $\lambda_0$ - коефіцієнт теплопередачі в статичних умовах; $T_{\text{р}}$ - питома теплоємність рідини.

З наведеного вище можна зробити такий узагальнюючий висновок. Міграція у підземних водах відбувається, головним чином, у формі взаємного витіснення рідин вод різного складу або температури. Головну роль при такому витісненні відіграє фільтраційний перенос, який розглядається за схемою поршневого витіснення. Але межа розподілу між рідинами різного

складу або температури не має чіткої форми, вона розмита внаслідок прояву гідродисперсії.

**Контрольні запитання**

1. Що таке «міграція у підземних водах»?
2. Які види течії виділяють в динаміці підземних вод у зв’язку з розглядом процесу міграції у підземних водах?
3. Що таке гравітаційні течії?
4. Що таке елізіонні течії?
5. Що таке змішані течії?
6. Які існують механізми міграції у підземних водах?
7. Що таке фільтраційний перенос?
8. Що таке дифузійний перенос?
9. Що таке гідродисперсія?
10. Які поняття розглядаються в зв’язку з застосуванням в розрахунках механізму фільтраційного переносу?
11. Як оцінюється дифузійний перенос при розгляді процесів міграції?
12. Як визначається коефіцієнт молекулярної дифузії?
13. Для яких умов закон Фіка є справедливим?
14. Як оцінюється гідродисперсія при розгляді процесів міграції?

## ТЕМА 16. ОСНОВИ ПЕРЕНЕСЕННЯ ВОЛОГИ В ЗОНІ АЕРАЦІЇ

*Зона аерації* - це простір між поверхнею землі та першим від поверхні постійно існуючим водоносним горизонтом (горизонтом із вільною поверхнею).

Зона аерації являє собою багатофазну систему. Її основними компонентами є:

- ґрунт;
- рідина (вода як розчин);
- повітря.

Через зону аерації відбувається взаємний зв`язок між поверхневими та підземними водами.

Найважливіша особливість зони аерації – це наявність повітря. При цьому повітря може бути в такому стані:

- вільному;
- затиснутому;
- розчиненому;
- адсорбованому.

Якщо вологість ґрунту зони аерації досягає значної величини, то в умовах атмосферного тиску розчинене та адсорбоване повітря знаходяться у невеликій кількості.

Наявність затиснутого повітря, що знаходиться в замкнених тупикових порах (затиснуте повітря ізольовано від атмосфери) суттєво впливає на водопроникність породи.

Особливе значення має вільне повітря. Воно знаходиться в порах та каналах, що мають зв`язок з атмосферою. Наявність вільного повітря характеризує особливі властивості ґрунтів зони аерації.

Рідина в порах та пустотах порід зони аерації знаходиться не лише у рідкій формі, но також у формі пару.

Розподіл вологи в зоні аерації обумовлений дією багатьох чинників. Найбільш прості умови розподілу мають місце при однорідній будові зони аерації.

Якщо зона аерації є однорідною, її потужність перевищує 10 м, а положення вільної поверхні ґрунтових вод є сталим, можна виділити у ній три характерні області за характером розподілу вологи в зоні аерації, а саме: верхню область активного вологообміну, середню область невеликої вологості та нижню область високої вологості (див. рис. 16.1).

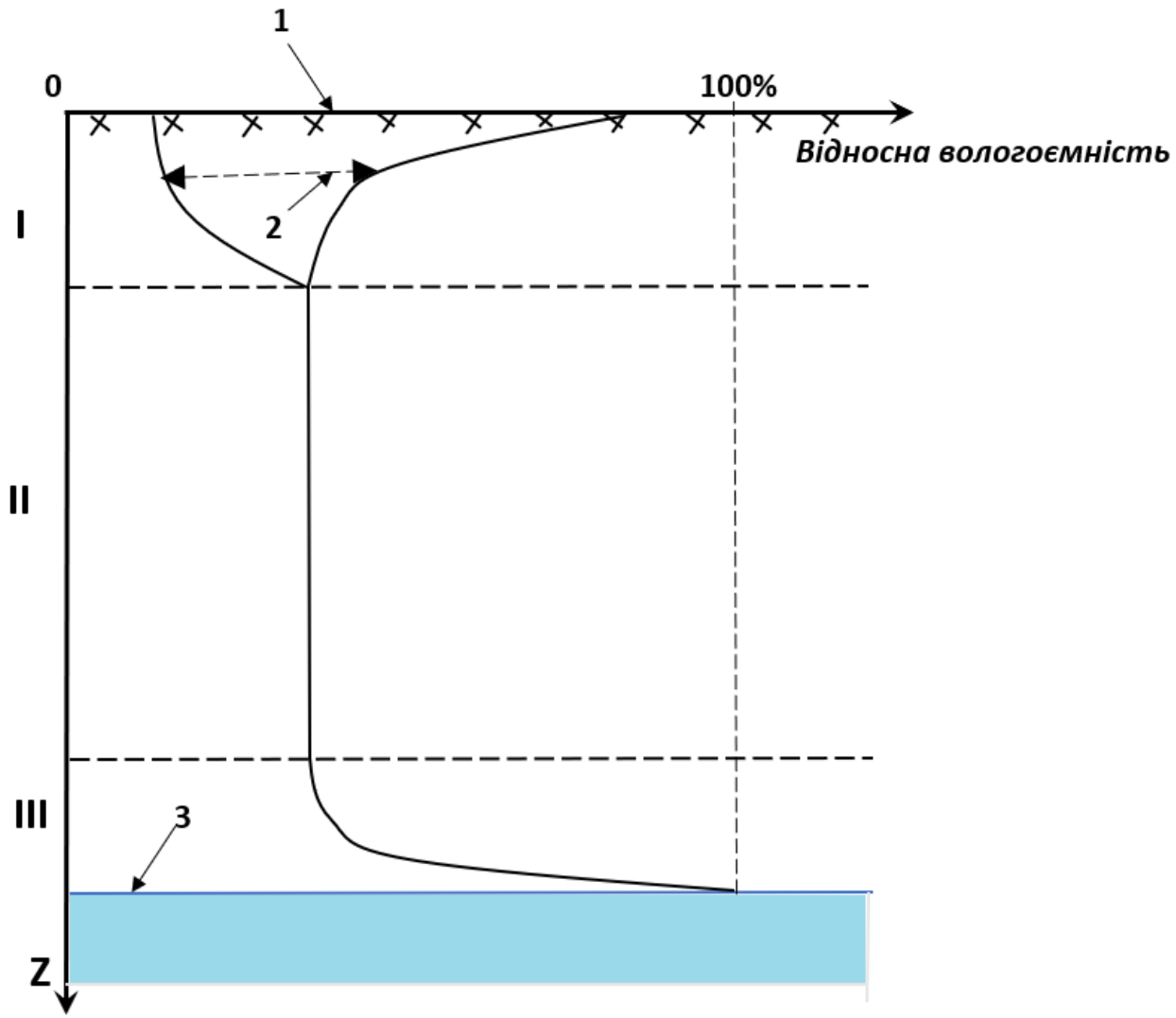


Рис. 16.1 Розподіл вологи в зоні аерації. I - верхня область активного вологообміну; II - середня область невеликої вологості; III - нижня область високої вологості; 1 - поверхня землі; 2 - амплітуда зміни вологості у верхній зоні; 3 - поверхня ґрунтових вод, на якій відносна вологість відповідає повній вологоємності.

Якщо рівень ґрунтових вод є сталим, у межах II та III областей зберігається усталений рух вологи в напрямку рівня ґрунтових вод. В області I зберігається неусталений рух вологи.

Зміни в атмосфері викликають зміни кількості вологи в зоні аерації, а також зміни температури та тиску. Тому тут відбуваються складні процеси (фізико-хімічні, термодинамічні, біологічні тощо).

Взагалі виділяють три характерні стани ґрунту з точки зору наявності рідини та повітря в ґрунті: насичений, ненасичений та квазінасичений.

*Насичений стан.* Вологість ґрунту відповідає повній вологоємності. Має місце двофазна система: ґрунт - рідина. Повітря в порах ґрунту відсутнє. Рух рідини відбувається за рахунок сили тяжіння (напірного градієнта). Тобто, тут

відбувається фільтрація води у відповідності до лінійного закону (закону Дарсі).

*Ненасичений стан.* Вологість ґрунту завжди менша, ніж повна вологоємність. Має місце трифазна система: ґрунт - рідина - повітря. Якщо повітря в порах створює безперервну фазу, тиск у рідині, поблизу поверхні розділу рідина-повітря, є меншим, ніж тиск у повітрі (атмосферний тиск), тобто, тиск від`ємний. Це і є головною ознакою ненасиченого стану ґрунту. Тому рідина в ненасичених ґрунтах не є вільною, не передає гідростатичного тиску, не витікає. Вона переміщується в ґрунті за рахунок гравітаційних та внутрішніх сил. В окремих замкнених порах ненасиченого ґрунту може знаходитися затиснуте повітря. У ненасиченому ґрунті рідина переміщується як у рідкій формі, так і у формі пару.

*Квазінасичений стан.* Тут також має місце трифазна система: ґрунт - рідина - повітря. Але повітря знаходиться в затиснутому стані. Вологість такого ґрунту менша, ніж повна вологоємність. Квазінасичений стан виникає в природних умовах у зоні коливань рівня ґрунтових вод, а також у зоні аерації (коли має місце інтенсивне просочування води зверху). Оскільки повітря розчинюється у рідині, кількість затиснутого повітря в ґрунті з часом зменшується. Рух води в квазінасиченому стані здійснюється у формі рідини, але площа поперечного перетину для руху рідини зменшена за рахунок затиснутого повітря. Тобто, водопроникність породи залежить від кількості затиснутого повітря.

Взагалі механізм руху води в ненасиченому середовищі суттєво змінюється при зміні вологості ґрунту. Якщо вологість є високою, вода переміщується за рахунок капілярного тиску. Якщо вологість мала, вода переміщується в плівках, які покривають поверхню часток ґрунту. Рідина і пар знаходяться у взаємодії, що обумовлює комбінований перенос вологи. Також мають місце процес дифузії вологи у вигляді пару та процес сорбції вологи на поверхні часток ґрунту. Тому рушійні сили та проникність ненасиченого ґрунту є дуже мінливими в залежності від вологості ґрунту.

У зв`язку з таким станом є необхідність у використанні поняття єдиної узагальнюючої сили, що визначає умови рівноваги і переміщення вологи при сукупному впливі різних механізмів переносу. Також є необхідність у використанні єдиного сумарного коефіцієнта, який характеризує проникність ґрунту для вологи.

З цих причин розроблене вчення про *гідрофізичну функцію.* Ця функція характеризує енергетичний стан вологи в ненасиченому середовищі. Вона дозволяє дати оцінку в одиницях роботи (або еквівалентного тиску) взаємодії сил різної фізичної природи. Така функція має назву повного термодинамічного потенціалу вологи.

*Повний термодинамічний потенціал вологи* - це робота, яка має бути витрачена (у розрахунку на 1 г чистої води) для того, щоб зворотно та

ізотермічно перенести в певну точку ґрунту нескінченно малу кількість води з об`єму чистої води, що знаходиться на умовному висотному рівні порівняння за умов атмосферного тиску:

$$G = G_Z + G_T \,, \qquad (16.1)$$

де $G_Z$ - гравітаційний потенціал вологи, $G_T$ - потенціал тензіометричного тиску вологи (потенціал тиску).

*Гравітаційний потенціал вологи* визначається як робота сили тяжіння, що віднесена до маси, тобто:

$$G_z = \frac{m\,g\,z}{m} = g\,z \,, \qquad (16.2)$$

де $m$ – маса, $g$ - прискорення сили тяжіння, $z$ - відстань від площини порівняння до точки, що розглядається.

*Потенціал тензіометричного тиску вологи* визначається як робота сил тиску, що віднесена до маси.

Робота сил тиску:

$$dA = P\,dV \,, \qquad (16.3)$$

де $P$ – тиск, $V$ - об`єм.

Тому:

$$G_T = \frac{dA}{dm} = \frac{P\,dV}{d\,m} \,. \qquad (16.4)$$

Оскільки густина $\rho = \frac{dm}{dV}$, то:

$$G_T = \frac{P}{\rho} \,. \qquad (16.5)$$

Отже, повний термодинамічний потенціал дорівнює:

$$G = \frac{P}{\rho} + g\,z \,. \qquad (16.6)$$

Напишемо останній вираз у такому вигляді:

$$\frac{G}{g} = \frac{P}{\rho\, g} + z\ . \qquad (16.7)$$

Питома вага $\gamma = \rho\ g$, тому:

$$\frac{G}{g} = \frac{P}{\gamma} + z\ . \qquad (16.8)$$

Якщо розглядати рідину в ґрунті як «прісну воду», то $\gamma = 1$. Тоді тиск $P$ можна подати у вигляді еквівалентної висоти стовпа рідини.

Тепер згадаємо поняття *повного гідродинамічного напору* (див. тему 1). Як бачимо, він є еквівалентним повному термодинамічному потенціалу при ізотермічних умовах у ґрунті, що не деформується:

$$H = \frac{P}{\gamma} + z = h + z\ . \qquad (16.9)$$

У насичених та квазінасичених ґрунтах тиск $P$ є додатним. Проте у ненасичених ґрунтах тиск виражає дію внутрішніх сил і завжди є від`ємним відносно до атмосферного тиску, який прийнятий як нульовий. Такий тиск має назву *всмоктувального тиску*, його позначають символом $P_{\text{в}}$. За аналогією з висотою тиску в насичених та квазінасичених ґрунтах $h_{\text{т}}$ для ненасичених ґрунтів використовують поняття *висоти всмоктування* $h_{\text{в}}$:

$$h_{\text{в}} = \frac{P_{\text{в}}}{\gamma}\ . \qquad (16.10)$$

Тиск звичайно вимірюється в метрах водного стовпа.

Існує поняття *основної гідрофізичної характеристики ґрунту (ОГХ)*, яке виражає залежність всмоктувального тиску $P_{\text{в}}$ від вологості ґрунту. Вона дозволяє оцінювати енергетичний стан рідини в ґрунті та пов`язувати з величиною вологості ґрунту величини повного гідродинамічного напору, всмоктувального тиску, висоти всмоктування та перелічених вище параметрів вологоперенесення. Така залежність є дуже складною і встановлюється дослідним шляхом.

Таким чином, для ненасиченого ґрунту застосовується поняття повного гідродинамічного напору, яке є аналогічним з поняттям напору в насиченому стані. Позначимо повний гідродинамічний напір для ненасиченого стану символом $H_{\text{нс}}$. Тоді за аналогією із законом Дарсі можна написати *закон перенесення вологи* в зоні аерації:

$$v_{\text{в}} = -K_{\text{в}}(\theta)\frac{\partial H_{\text{нс}}}{\partial z}, \qquad (16.11)$$

де $K_{\text{в}}(\theta)$ - *коефіцієнт перенесення вологи*, який є функцією від вологості ґрунту $\theta$.

Залежність коефіцієнту перенесення вологи від вологості ґрунту є дуже складною. Існують емпіричні формули для опису такої залежності, наприклад, залежності С. Авер`янова та В. Гарднера.

Слід зазначити, що коефіцієнт перенесення вологи - це характеристика вологопровідності ненасиченого ґрунту. Найбільшої величини коефіцієнт перенесення вологи досягає при повному насиченні ґрунту водою. У такому разі він відповідає значенню коефіцієнта фільтрації. Розмірність коефіцієнта перенесення вологи така ж сама, як і розмірність коефіцієнта фільтрації.

Крім коефіцієнта вологоперенесення, для характеристики процесу застосовують такі параметри, як *коефіцієнт ємності вологи* та *коефіцієнт дифузивності вологи (коефіцієнт вологопровідності).*

Для подальшого отримання диференціального рівняння перенесення вологи в зоні аерації застосовують такий саме підхід, як і для зони повного насичення (див. тему 5): спочатку складають рівняння нерозривності, а потім застосовують згаданий закон перенесення вологи.

**Контрольні запитання**

1. Що таке зона аерації?
2. В якому стані може знаходитись повітря в зоні аерації?
3. В якому стані може знаходитись рідина в зоні аерації?
4. Які області розподілу вологи виділяють в зоні аерації?
5. Які типи стану ґрунту виділяють в зоні аерації?
6. Який стан ґрунту називають насиченим?
7. Який стан ґрунту називають ненасиченим?
8. Який стан ґрунту називають квазінасиченим?
9. Що таке повний термодинамічний потенціал вологи?
10. Що таке гравітаційний потенціал вологи?
11. Що таке потенціал тензометричного тиску?
12. Що означають поняття «всмоктуючий тиск» та «всмоктуюча висота»?
13. Як формулюється закон переносу вологи?
14. В чому суть поняття «коефіцієнт переносу вологи»?
15. Що таке основна гідрофізична характеристика ґрунту?

# ЛІТЕРАТУРА

## Основна

1. Кошляков О.Є., Мокієнко В.І. Динаміка підземних вод. Головні поняття та визначення. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2004.
2. Кошляков О.Є., Мокієнко В.І. Практикум з динаміки підземних вод. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2005.
3. Kresic Neven. Hydrogeology and Groundwater Modeling (2nd Edition). – New York : CRC Press, 2006.
4. Conlon T. D. Hydrogeology and Simulation of Ground-Water Flow in the Sandstone Aquifer. - The Ohio State University, 1998.
5. Delleur, J. W. The Handbook of groundwater engineering (2nd edition) / : PressCRC. - 2007. https://bayanbox.ir/view/1629400497415576668/BOOK-The-handbook-of-groundwaterengineering.pdf

## Додаткова

1. Кошляков О.Є. Гідрогеологічне моделювання: Підручник – К.: ВПЦ «Київський університет», 2003.
2. Кошляков О.Є. Практикум з навчальної дисципліни «Гідрогеологічне моделювання» / О.Є. Кошляков. – Інтернет-ресурс Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – geol.univ.kiev.ua.
3. Рудаков Д.В. Моделювання в гідрогеології: Навч. Посібник – Д. : Національний гірничий університет, 2011.
4. Євграшкіна Г.П., Войцеховська В.В. Гідрогеологія та основи гідромеліорації. – Дніпропетровськ : ДНУім. Олеся Гончара, 2010.
5. Мандрик Б.М., Чомко Д.Ф., Чомко Ф.В. Гідрогеологія. – К., 2005.
6. Костюченко М.М., Шабатін В.С. Гідрогеологія та інженерна геологія. - К. ВПЦ «Київський університет», 2005.
7. Applied Groundwater Modeling Second Edition Simulation Of Flow And Advective Transport. https://masterpdf.pro/download/4330427-applied-groundwater-modeling-second-editionsimulation-of-flow-and-advective-transport
8. David Keith Todd, Larry M. Mays. Groundwater Hydrology (3rd edition). – 2005. https://old.amu.ac.in/emp/studym/99994128.pdf
9. Жернов И.Е. Динамика подземных вод: Учебное пособие – К.: Вища школа, 1982.

**Зміст**

ВСТУП с. 3
ТЕМА 1. ОСНОВИ ДИНАМІКИ ВОДНИХ ПОТОКІВ с. 5
ТЕМА 2. ЗАКОНИ ФІЛЬТРАЦІЇ с. 17
ТЕМА 3. ГРАВІТАЦІЙНА ТА ПРУЖНА ЄМНІСТЬ ГІРСЬКИХ ПОРІД с. 26
ТЕМА 4. ПОТОКИ ПІДЗЕМНИХ ВОД с. 32
ТЕМА 5. ВИХІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ФІЛЬТРАЦІЇ с. 52
ТЕМА 6. ОСНОВНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЛАНОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ с. 58
ТЕМА 7. МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ГЕОФІЛЬТРАЦІЇ с. 66
ТЕМА 8. АНАЛІТИЧНІ РОЗРАХУНКИ УСТАЛЕНИХ ОДНОМІРНИХ ПОТОКІВ ПІДЗЕМНИХ ВОД с. 73
ТЕМА 9. ФІЛЬТРАЦІЯ В ЗОНІ ВПЛИВУ ГІДРОТЕХНІЧНИХ СПОРУД с. 82
ТЕМА 10. ФІЛЬТРАЦІЯ В ЗОНІ ВПЛИВУ ГОРИЗОНТАЛЬНИХ ВОДОЗАБОРІВ с. 94
ТЕМА 11. ФІЛЬТРАЦІЯ В ЗОНІ ВПЛИВУ ОДИНОЧНИХ ВЕРТИКАЛЬНИХ ВОДОЗАБОРІВ (СВЕРДЛОВИН) с. 108
ТЕМА 12. ФІЛЬТРАЦІЯ В ЗОНІ ВПЛИВУ ВЗАЄМОДІЮЧИХ СВЕРДЛОВИН (ГРУПОВИХ ВОДОЗАБОРІВ) с. 132
ТЕМА 13. ВИЗНАЧЕННЯ ГЕОФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПАРАМЕТРІВ ЗА ДАНИМИ РЕЖИМНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ с. 137
ТЕМА 14. ВИЗНАЧЕННЯ ГЕОФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПАРАМЕТРІВ ЗА ДАНИМИ ДОСЛІДНО-ФІЛЬТРАЦІЙНИХ РОБІТ с. 143
ТЕМА 15. ОСОБЛИВОСТІ МІГРАЦІЇ У ПІДЗЕМНИХ ВОДАХ с. 151
ТЕМА 16. ОСНОВИ ПЕРЕНЕСЕННЯ ВОЛОГИ В ЗОНІ АЕРАЦІЇ с. 158
ЛІТЕРАТУРА с. 164