Безродний Д.А.

Гравіметрія

В 3-х книгах

КНИГА 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ГРАВІМЕТРІЇ

Київ - 2017

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ГРАВІМЕТРІЯ
КНИГА 1
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ГРАВІМЕТРІЇ

для студентів 3 курсу спеціальності 6.040103 – «Геологія»
(спеціалізація – геофізика)

Затверджено вченою радою
ННІ «Інститут геології»
«????» жовтня 2017 року

Київ - 2017

Підручник «Гравіметрія» в 3 книгах, книга 1 «Теоретичні основи гравіметрії» для студентів спеціальності 6.040103 – «Геологія» (спеціалізація – геофізика/ Упорядник – доц. Безродний Д.А. – електронний ресурс, 2017 – 185 с.

Рецензенти - проф., докт. геол. н. Вижва С.А.,
проф., докт. геол.н. Орлюк М.І.

ЗМІСТ

ВСТУП 7
1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ ГРАВІМЕТРІЇ 10
1.1. Історичний розвиток гравіметрії 10
1.1.1. Теоретичні основи (17 - 18 ст.) 11
1.1.2. Маятникові вимірювання та їх застосування в геодезії і геофізиці (17 – 18 ст.) 13
1.1.3 Спостереження з крутильними вагами та гравіметрами та їх застосування в прикладній геофізики (перша половина 20 ст.) 18
1.1.4. Створення гравіметричних мереж, геодезичні і геофізичні результати (друга половина 20 ст., початок 21 ст.) 23
1.1.5 Сучасний стан гравіметричної вивченості України 28
1.2. Закон Всесвітнього тяжіння. Гравітаційна стала G 31
1.3. Сила тяжіння та її складові. Напруженість гравітаційного поля 34
1.4. Вага 36
1.5. Невагомість 39
1.6. Космічні швидкості 40
1.7. Прискорення сили тяжіння та потенціал сили тяжіння 44
1.8. Еквіпотенціальні (рівневі) поверхні 47
1.9. Геоїд 51
1.10. Нормальне гравітаційне поле Землі 53
1.11. Другі похідні потенціалу сили тяжіння. Одиниці вимірювання других похідних 57
1.12. Кривизни та їхня роль в гравіметрії 59
1.13. Нормальні значення других похідних потенціалу сили тяжіння 61
1.14. Аномалії сили тяжіння 62
1.15. Зв’язок між похідними гравітаційного і магнітного потенціалів 65
2. РЕДУКЦІЇ СИЛИ ТЯЖІННЯ 69
2.1. Необхідність та смисл введення редукцій 69
2.2. Редукція у вільному повітрі 71
2.3. Поправка за денний рельєф місцевості 73
2.4. Редукція Буге 76
2.5. Редукція Прея 78

2.6. Тимчасові зміни сили тяжіння 80
2.7. Припливні зміни сили тяжіння..... 82
2.8. Неприпливні зміни сили тяжіння..... 89
2.9. Вікові зміни сили тяжіння 90
3. ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ТЕОРІЇ СИЛИ ТЯЖІННЯ 92
3.1. Поле тяжіння і рішення прямої задачі..... 92
3.2. Різні типи мас і їх густини..... 96
3.3. Дві фундаментальні властивості поля тяжіння 99
3.3.1. Незалежність інтеграла $\boldsymbol{lgdl}$ від шляху інтегрування..... 99
3.3.2. Зв'язок між потоком поля тяжіння і його джерелами (масами)..... 102
3.4. Система рівнянь поля тяжіння 105
3.5. Рівняння Лапласа і Пуассона..... 109
3.6. Потенціал та його зв’язок з масами 111
3.7. Фундаментальні розв’язки рівнянь Пуассона та Лапласа 112
3.8. Теорема єдності і розв’язок прямої задачі 117
3.8.1.Крайова задача першого роду 121
3.8.2.Крайова задача другого роду 122
3.8.3.Крайова задача третього роду 123
3.8.4.Крайова задача четвертого роду 125
3.9.Формула Гріна і співвідношення між потенціалом і граничними умовами 126
3.10.Аналітичне продовження поля в верхній напівпростір 130
3.11.Інтеграл Пуассона..... 133
3.12.Поведінка поля притягання 136
3.12.1.Поле притягання сферичної маси 136
3.12.2.Поле притягання тонкого сферичного шару..... 140
3.12.3. Оцінка маси довільного тіла..... 142
3.12.4. Нормальна компонента поля притягання, що створена плоскими поверхневими масами 142
3.13. Функції Лежандра та розв’язок рівняння Лапласа..... 146
3.13.1. Розпад функції $\boldsymbol{1R}$ в степеневі ряди 146
3.13.2. Рівняння Лапласа та функції Лежандра 148
4. ПРИТЯГАННЯ ТІЛ ПРАВИЛЬНОЇ ФОРМИ..... 151
4.1. Притягання сферичного шару і кулі 151
4.2. Притягання горизонтального відрізка і лінії 155
4.3. Притягання диска, шару, циліндра і конуса 158

5. ГУСТИНА ГІРСЬКИХ ПОРІД 166
5.1. Густина магматичних порід 166
5.2. Густина метаморфічних та ультраметаморфічних порід 169
5.3. Густина осадових порід 174
ЛІТЕРАТУРА..... 179

ВСТУП

Гравіметрія – це наука про вимірювання прискорення сили тяжіння та інших компонент гравітаційного поля на поверхні Землі або поблизу неї. Гравітаційна розвідка представляє собою один з методів геофізики для вирішення багатьох практично важливих геологічних і чисто наукових задач, оскільки величина сили тяжіння залежить від місцерозташування пунктів спостереження і розподілу збурюючих мас.

Гравітаційна розвідка використовується для вивчення глибинної будови земної кори, тектонічного і петрографічного районування, глибинного геологічного картування, пошуку і прогнозуванню родовищ і покладів нафти і газу, пошуку і розвідці твердих корисних копалин і будівельних матеріалів, вирішення деяких задач інженерної геології, вивчення фігури Землі (геодезична гравіметрія). Загалом, можна виділити наступні основні напрямки застосування гравіметрії:

- вивчення глибинної будови Землі ;
- пошуки і розвідка родовищ горючих і твердих корисних копалин;
- визначення фігури Землі;
- оцінка пружних напружень в надрах Землі;
- вивчення сучасних геодинамічних явищ;
- вимірювання сили тяжіння для визначення різних фізичних констант.

Гравіметрія тісно пов’язана з математикою, фізикою, геодезією, астрономією і, звичайно, геологією. При розв’язку задач гравіметрії застосовуються сучасні математичні методи (рівняння математичної фізики, статистичні методи, теорія функції комплексної змінної тощо). Результати гравіметричних досліджень широко використовуються в гравіметричній геодезії для уточнення форми Землі, для визначення гравітаційних полів Місяця і інших планет, для розв’язку балістичних задач.

Особливе значення відіграють гравіметричні дослідження для розв’язку різноманітних прикладних геологічних задач. Необхідно відзначити, що найбільш якісне тлумачення гравітаційних аномалій проводиться в комплексі з іншими методами геофізики

(магніторозвідкою, сейсморозвідкою, електророзвідкою, петрофізикою, геофізичними дослідженнями в свердловинах) та при аналізі результатів геологічних досліджень.

Співставлення гравітаційних і геологічних карт (особливо структурних) завжди проводиться при якісному тлумаченні гравітаційних аномалій. Причому навіть такі співставлення не завжди дають позитивний результат, тобто надійну основу геологічного тлумачення; іноді гравітаційні карти показують розташування аномалій, які не узгоджуються з контурами структур, що встановлені по геологічній карті. В інших випадках – аномалії за місцезнаходженням ув'язуються з структурами, проте їх знак не узгоджується з характером структур (підняттю щільних порід відповідає не максимум, а мінімум сили тяжіння і т.п.). Тому в подібних випадках слід пам'ятати, що основний план гравітаційного поля визначається будовою більш глибинних горизонтів земної кори, а не при поверхневими шарами порід, що представлені на геологічній карті.

Найчастіше гравірозвідувальні роботи проводяться в комплексі з магніторозвідкою. При цьому, якщо гравітаційні і магнітні аномалії викликані одним й тим самим геологічним об'єктом, то вони звичайно не завжди співпадають за місцезнаходженням, розміром, формою і т.п., а іноді різняться досить істотно. Причиною невідповідності є різна аналітична природа і гравітаційних, і магнітних аномалій.

Досить успішним є комплексування гравітаційних зйомок і результатів сейсморозвідувальних або електророзвідувальних робіт, що проводилися на ділянці робіт. В багатьох випадках вони досить правдоподібно вказують на зв'язок гравітаційних аномалій з тими або іншими структурами – характером поверхні кристалічного фундаменту, з тектонічними порушеннями, підняттями або зануреннями пластів осадових порід, з рудними родовищами.

Залучення даних петрофізичних досліджень (щільність гірських порід ділянки) істотно підвищує результативність гравіметричних досліджень.

1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ ГРАВІМЕТРІЇ

1.1. Історичний розвиток гравіметрії

Перші вимірювання сили тяжіння в XVII і XVIII ст. були пов'язані з розвитком механіки твердого та деформованого тіл [1]. Точність вимірювання відстаней і часу, необхідних для визначення сили тяжіння, була вже досить висока, щоб використовувати гравіметрію для завдання еталона довжини на основі цієї природньої величини і, після того як була виявлена залежність сили тяжіння від місця розташування, для вивчення фігури Землі. Надалі розвиток гравіметрії визначається як технічними можливостями, так і науковими задачами геодезії і геофізики, в яких зростаючий вплив починають надавати практичні завдання геодезичних вимірювань і геофізичних досліджень.

Особливість розвитку гравіметрії за останні три століття полягає в безперервному поширенні вивчених територій континентів і океанів, при цьому точність вимірювань весь час зростає. Відповідно до застосовуваної апаратури і вирішуваних завдань можна виділити чотири етапи розвитку гравіметрії:

- становлення теоретичних основ (XVII - XVIII ст.);
- вдосконалення маятникових приладів і початок їх використання в глобальних задачах геодезії і геофізики (XVIII і XIX ст.);
- розвиток варіометрів і статичних гравіметрів, регіональні гравіметричні зйомки для геофізики (перша половина XX ст.);
- розвиток балістичних гравіметрів і створення прецизійних гравіметричних мереж для вирішення задач геодезії, геофізики і геодинаміки (друга половина XX ст. – сьогодення).

Будемо надалі дотримуватися цих етапів; зауважимо також, що розвиток гравіметрії після 1950-х рр. описується більш детально в відповідних розділах підручника поряд з відомостями про основні роботи в попередні роки.

У списку літератури історія гравіметрії відображена в історичних трактатах з наук про Землю [2], визначенням фігури Землі [3] і

геофізики [4]. Огляд досягнень до початку нашого століття подано в праці [5].

1.1.1. Теоретичні основи (17 - 18 ст.)

Теоретичні основи гравіметрії склалися в період кульмінації наукової революції одночасно з розвитком теорії тяжіння, механіки твердого тіла і гідростатики.

До 16-го століття феномен гравітаційного прискорення описувався теорією Аристотеля (384 - 322 рр. до н.е.), відповідно до якої швидкість падіння тіл пропорційна їх вазі. Датчанин С. Стевін (1548 - 1620) і Галілео Галілей (1564 - 1642) змогли спростувати цю теорію експериментами з падаючими тілами. Проводячи досліди з похилими площинами, Галілей встановив, що вільне падіння - це рівноприскорений рух. І, нарешті, він встановив, що період коливань маятника залежить тільки від його довжини. Ґрунтуючись на цьому, Християн Пойгенс (1629 - 1695) розвинув теорію математичного й фізичного маятників і створив перший маятниковий годинник.

З відкриттям двох законів - закону вільного падіння і закону коливань маятника в гравіметрії були встановлені два фундаментальних співвідношення. Понад два століття єдиним вимірювальним приладом залишався маятник. На перших порах, однак, вимірюється не величина сили тяжіння, а довжина секундного маятника, тобто довжину маятника (0,994 м) з напівперіодом коливань рівним одній секунді.

Після перших визначень П. Мерса (1644) і Г.Б. Річчолі (1647) Х. Пойгенс в 1664 р пропонує визначити міру довжини фут як одну третину довжини секундного маятника. Таким чином, в той час сила тяжіння приймалася величиною постійною і її передбачалось використовувати для визначення одиниці довжини. Через 10 років він розширює це визначення, враховуючи залежність довжини секундного маятника від широти. Ж. Пікар переслідував цю ж мету, виконуючи маятникові спостереження при вимірах дуги Паризького меридіана (1669 - 1670).

Незабаром експедиції в низькоширотних областях земної кулі виявили залежності сили тяжіння від місця розташування. Під час перебування в Кайєні в 1672 - 1673 рр. французький астроном

Ж. Ріше (1630 - 1696) встановив, що вивірений в Парижі годинник з секундним маятником на 2,5 хвилини відстає від астрономічного часу. Відставання можна було усунути, скоротивши маятник на 1,25 «паризької лінії» (3 мм). Після повернення в Париж залежність періоду коливань маятника від місця розташування була підтверджена. У 1677 - 1678 рр. під час експедиції на острів Св. Олени англійський астроном Е. Галілей отримав подібний результат з секундним маятником, який був вивірений в Лондоні. Ці та наступні спостереження знайшли пояснення в теоретичних роботах І.Ньютона і Гюйгенса.

Ще Аристотель дав фізичне пояснення сферичності Землі, яке сприймали як постулат в античні часи. Він пояснив його наслідком руху елементарних частинок (корпускул) до центру Всесвіту. Приблизно в 1666 р Ісак Ньютон (1643 - 1727) прийшов до висновку, що вільне падіння - це прояв тяжіння, закони якого він вивів із законів планетарного руху Кеплера. У 1687 р І. Ньютон опублікував закон тяжіння в «Математичних засадах натуральної філософії»:

$$b = G\frac{m_1 m_2}{l^2}$$

де b - сила гравітаційного тяжіння; G - гравітаційна стала; l - відстань між взаємно притягуються масами m_1 і m_2.

Після відкриттів в області тяжіння і руху тіла в центральному полі (Гюйгенс, 1673) стали можливими дослідження фігур рівноваги рідини, що обертається. Використовуючи різні підходи, Ньютон (1687) і Гюйгенс (1690) визначили фігури рівноваги рідкої однорідної Землі, виявивши при цьому ефект полярного стиснення. За Ньютоном, ця фігура є еліпсоїд обертання, на поверхні якого сила тяжіння повинна зростати від екватора до полюсів. Гюйгенс зробив важливий висновок, що на поверхні рідкого тіла, яке знаходиться в рівновазі, результуюча сила перпендикулярна цій поверхні.

Після класичних робіт Архімеда (287 - 212 рр. до н.е.) і С. Стевина (1548 - 1620) дослідження в області гідростатики були продовжені в 18-м столітті Л. Ейлером (1707 - 1783), К. Маклореном (1698 - 1 746) і П. Буге (1698 - 1758). Буге вводить поняття рівної поверхні і поширює своє дослідження на фігуру рівноваги тіла, що обертається, що складається з концентричних шарів. Роботи А.К. Клеро (1713 - 1765) набули особливого значення для геодезичного використання вимірювань сили тяжіння. У книзі

«Теорія фігури Землі» [6] він наводить доказ формули тяжіння Ньютона і формулює теорему, названу згодом теоремою Клеро. Теорема справедлива для рівневого сфероїда або еліпсоїда обертання і не вимагає яких-небудь припущень про розподіл густини усередині тіла. Вона пов'язує стиснення зі значеннями сили тяжіння на полюсі і екваторі. Отже, стиснення еліпсоїда можна визначити з вимірів сили тяжіння на двох різних широтах за умови, що екваторіальний радіус еліпсоїда відомий. Отже, Клеро сформулював гравіметричний метод вищої геодезії, що дозволяє визначити геометричні параметри фігури Землі за вимірюваннями сили тяжіння.

У геофізиці важливе значення має диференціальне рівняння Клеро, що визначає стиснення шарів рівної густини в шаруватих фігурах, які перебувають в рівновазі.

Становлення і розвиток теорії потенціалу, що належать в основному заслугам французьких математиків Ж.Л. Лагранжу (1736 - 1813), П.С. Лапласу (1749 - 1827), А.М. Лежандру (1752 - 1833) і С.Д. Пуассону (1741 - 1840), завершили створення математичного апарату для гравіметрії.

1.1.2. Маятникові вимірювання та їх застосування в геодезії і геофізиці (17 – 18 ст.)

Тривалий час, навіть в значній частині 20-го століття гравіметричні дані, необхідні для геодезії і геофізики, отримували за допомогою маятникових вимірювань.

Залежність сили тяжіння від широти пункту підтверджена французькими дослідниками спостереженнями під час градусних вимірювань в Лапландії (1736 – 1737, П.Л. Мопертюи) і в Перу (1735 – 1744, П. Буге і С.М. Ла Кондамін). Маятникові прилади на цій ранній стадії розвитку гравіметрії представляли собою наближення до математичного маятника. Буге [7] спостерігав в Андах залежність сили тяжіння від висоти та знайшов важливу для геофізики поправку за приведення сили тяжіння до рівня моря.

Точність приблизно $\pm\ 10^{-5}$g отримали Ж.Ш. Борда і Дж. Д. Кассіні де Тюрі [8] під час високоточного експерименту в Паризькій астрономічній обсерваторії. Результати вимірювань з нитковим маятником (платинова кулька діаметром 36 мм на нитці

довжиною 3,8 м) використовувалися для порівняння довжини секундного маятника на широті 45° з новою одиницею довжини – метром. Період коливань визначали методом збігів, запропонованим Р. Бошковичем (1711 – 1787). Метод передбачав визначення моментів одночасного проходження через положення рівноваги двох маятників: гравіметричного таі секундного.

У перші десятиліття XIX ст. розвиваються нові методи вимірювань, зростає число пунктів і розширюються площі зйомок з транспортабельними приладами.

У 1811 р Дж. Боненбергер в Німеччині описує принцип оборотного маятника, а англієць Х. Кетер [9] створює перший прилад для польових робіт. Оборотний маятник Кетера має бронзову штангу з двома призмами; відстань між лезами призм 1 м. На штанзі жорстко укріплений вантаж масою 1 кг, і є рухливий вантаж масою 32 г. Переміщуючи останній, домагаються ізохронності коливань маятника щодо обох осей. Після успішної демонстрації в Лондоні (похибка вимірювання близько 35 мГал) цей фізичний маятник утвердився в практиці гравіметрії.

Однак, більш важливим було створення «незмінних» маятників постійної довжини. З такими приладами можна визначати приріст сили тяжіння відносно деякого початкового значення (відносні вимірювання сили тяжіння).

Для відносних вимірювань Ж.Б. Біо (1774 – 1862) використовує транспортабельний нитковий маятник Борда (довжина маятника близько 0,75 м), тоді як Кетер [10] застосовує фізичний маятник з одним лезом. Вимірювання з такими приладами виконували на численних французьких і англійських пунктах градусних вимірювань. У 1818 – 1831 рр. в англійських, французьких і російських морських експедиціях визначені значення сили тяжіння на узбережжях і на островах у всіх областях земної кулі з похибкою приблизно 5 мГал.

Подальший розвиток абсолютних гравіметричних визначень пов'язаний з ім'ям астронома Ф.В. Бесселя (1784 – 1846). Поряд з глибокими дослідженнями в області теорії оборотного маятника та джерел помилок Бессель удосконалює нитковий маятник. Якщо у ниткового маятника можуть бути дві осі коливань, лінійні вимірювання зводяться до вимірювання відстані між цими осями. Спостереження в Кенігсберзі та Берліні показали переваги цього

приладу (похибка близько 10 мГал). Однак використовувався він лише кілька разів [11, 12].

Близько 1830 р маятникові вимірювання припиняють і відновлюють лише в 1862 р за планом робіт «Середньоєвропейського градусного вимірювання» та створених пізніше організацій.

Оскільки до цього часу отримані гравіметричні дані для територій з більшою довжиною по широті, виконуються перші обчислення стиснення Землі та визначення сили тяжіння на поверхні еліпсоїда за теоремою Клеро. У 1799 р. французький вчений П. Лаплас [13] отримує величину стиснення близько 1:330 за 15 значеннями сили тяжіння. Для більш точного формулювання крайової задачі фізичної геодезії (визначення фігури Землі та її зовнішнього гравітаційного поля за вимірюваннями сили тяжіння на поверхні Землі) набули великого значення інтегральні теореми К.Ф. Гауса (1777 – 1855) і Дж. Гріна (1793 – 1841). Гаус [14] пропонує вважати математичною фігурою Землі еквіпотенціальну поверхню, що збігається з поверхнею Світового океану. Пізніше Дж. Б. Лістинг [15] називає цю поверхню геоїдом. Особливу важливість мала робота англійського математика та фізика Дж. Г. Стокса (1819 – 1903). Він довів, що не існує єдиного рішення оберненої задачі теорії потенціалу, тобто визначення розподілу мас усередині Землі по її зовнішньому гравітаційному полю. Ця задача – дуже важлива в геофізиці. Інтегральна формула Стокса дозволяє визначати форму геоїда за значеннями сили тяжіння. Цю формулу, однак, змогли використати лише через сто років, коли для поверхні Землі вже було досить багато гравіметричних даних.

З середини XVIII ст. і в XIX ст. розвивався геофізичний напрямок використання вимірювань сили тяжіння, який заснований на теорії гравітаційного поля та аналізі результатів маятникових спостережень. Спочатку він полягав у визначенні маси Землі або середньої густини Землі, а також гравітаційної постійної. Для цих цілей проводили як польові, так і лабораторні експерименти.

Буге на основі маятникових вимірювань в Перу встановлює співвідношення між густиною гірських порід в Андах і середньою густиною Землі. Сабін [16] приходить до висновку про можливість оцінити розподіл мас у верхніх шарах Землі по вимірюванням сили тяжіння. Визначення середньої густини виконували Дж. Б. Ері [17]

в шахті вугільних копалень в Дурхамі (середня густина 6570 кг/м^3) і Р. фон Штернек [18] в шахті глибиною 1000 м в Прибрамі, Чехія (5770 кг/м^3). Велике значення і зараз має визначення гравітаційної постійної з крутильними вагами. Конструкція Дж. Мінела (1724 – 1793) була заснована на взаємному тяжінні мас, закріплених на горизонтальному стрижені, і наявних поруч з ними зовнішніх мас. Г. Кавендіш (1731 – 1810) використовував вдосконалений прилад Мічела і виконав успішне визначення гравітаційної сталої ($6{,}75 \cdot 10^{-11}$ м^3/кг • с^2) та середньої густини Землі (5450 кг/м^3) [19]. Ф. фон Іоллі [20] запропонував для визначення середньої густини метод зважування, який в подальшому використовувався неодноразово.

Вивчення аномалій сили тяжіння та напряму прямовисної лінії поблизу гір призвело до створення теорії ізостазії, фундаментальної теорії геофізики. Ще Леонардо да Вінчі (1452 – 1519) вказував на рівноважний стан видимих земних мас. Термін «Ізостазія» введений в 1889 р американським геологом К.Є. Деттоном. Відповідно до цієї теорії видимі надлишки мас (гори) і недостатність мас (океани) компенсуються змінами густини або товщини земної кори так, що на певній глибині компенсації настає гідростатична рівновага.

Ухилення прямовисній лінії, отримані Дж. Еверестом на півдні Гімалаїв, стали підставою для розробки відповідних теорій, опублікованих в 1885 р англійським астрономом Дж.Б. Ері (1801 – 1892) і архідияконом Дж.Х. Праттом (1809 – 1871), які служили в Калькутті. Виявилося, що величини цих відхилень менше величин, обчислених з урахуванням впливу топографічних мас [17, 22].

Створене в 1862 р товариство «Середньоєвропейський градусний вимір» стимулювало подальшу діяльність в області гравіметрії. Спочатку, незважаючи на успішні спостереження з незмінними маятника, тривають і удосконалюються переважно абсолютні вимірювання сили тяжіння.

Відповідно до рекомендацій Бесселя, Дж. Репсольд створив в Гамбурзі транспортабельний прилад з оборотним маятником (латунний маятник з відстанню між лезами ножів 1 м), який починаючи з 1862 р використовували в багатьох країнах. У Франції використовується прилад, створений фірмою Brunner Bros, з розробок Х. Де- Форж (метровий і півметровий маятники). У 1875 р американським дослідником К.С. Пірсом виявлено явище співхитання штатива, яке залежне від жорсткості основи. Ці прилади

були складні в використанні, та їх застосування не призвело ні до підвищення точності (помилка ±10 мГал), а ні до помітного збільшення продуктивності. У підсумку в 1884 р Гельмерт мав визначення з секундними маятника лише на 122 пунктах, включаючи і попередні спостереження.

Наприкінці XIX ст. для вимірювання приростів сили тяжіння переважно використовують маятникові прилади, створені австрійським дослідником Р. фон Штернеком. Прирости визначають за зміною періоду коливань маятника з незмінною довжиною від пункту до пункту.

У той час використовувалися 25-см латунні маятники. Стало можливим поступово підвищувати точність визначення приростів сили тяжіння від ± 10 – 20 мГал до ± 5 мГал за час спостережень на пункті від півдоби до доби. Державні геодезичні організації виконали ряд великих національних програм вимірювань сили тяжіння. У 1912 р було вже близько 2500 значень сили тяжіння, хоча розподіл гравіметричних пунктів по поверхні Землі і не був рівномірним.

Перехід до відносних вимірювань сили тяжіння вимагав високоточного визначення її абсолютних значень. Ф.Р. Гельмерт (1843 –1917) спочатку використовував значення сили тяжіння на австрійському фундаментальному пункті Військового географічного інституту у Відні (Віденська гравіметрична система). Після того як Гельмерт істотно переробив теорію оборотного маятника, Ф. Кюнен і Ф. Фуртвенглєр в 1898 – 1904 рр. виконали нові абсолютні вимірювання сили тяжіння в Потсдамі. Результати цих спостережень стали основою Потсдамської гравіметричної системи, прийнятої в 1909 р.

Крім розробки гравіметричної системи, а також глобальних і регіональних гравіметричних зйомок на континентах, абсолютно необхідними для вирішення задач геодезії та геофізики є вимірювання сили тяжіння на океанах.

У 1899 р в Норвегії Х. Мон застосовує метод визначення сили тяжіння на вимірах з гіпсометром (термометром, який працює на точці кипіння) і ртутним барометром. У 1901 – 1909 рр. О. Геккер з Потсдамського геодезичного інституту виконує більше 250 вимірювань в експедиціях по Атлантичному, Індійському та Тихому океанах, а також по Чорному морю. Використавши ці дані, він зміг

показати, що на океанах також існує ізостатична компенсація, за винятком областей глибоководних западин.

Використання великої кількості гравіметричних даних по земній кулі, що накопичилися до кінця XIX ст. вимагало детальних досліджень щодо питання про редукцію сили тяжіння на рівень моря. Гельмерт [22, 23] вносить фундаментальний внесок для вирішення цього питання. Використавши майже 1400 значень аномалій у вільному повітрі, Гельмерт [24] отримав стиснення еліпсоїда 1: 298,3, виключивши дуже непредставницькі острівні пункти. Отримана за результатами досліджень формула для нормальної сили тяжіння (1901 р.) після приведення до Потсдамської системі широко використовувалася в перші десятиліття 20 ст.

1.1.3 Спостереження з крутильними вагами та гравіметрами та їх застосування в прикладній геофізики (перша половина 20 ст.)

Для вивчення детальної структури гравітаційного поля велике значення мають роботи по створення угорським вченим Р. фон Етвешом (1848 – 1919 рр.) крутильних терезів, придатних для польових робіт [25, 26]. Якщо спостереження кута горизонтального повороту крутильних терезів Кавендіша дають лише параметри кривизни рівневих поверхонь, то прилад Етвеша дозволяє визначати горизонтальний градієнт сили тяжіння, оскільки пробні маси знаходяться на різній висоті.

У першому десятилітті 20 в. в Угорщині проводилися великі за обсягами спостереження з крутильними вагами, які показали, що радіус кривизни рівневих поверхонь сильно змінюється (від 3 до 200 тис. км) та що за допомогою крутильних терезів можна виявити зміни щільності мас поблизу денної поверхні.

На початкових етапах розвідки нафтових родовищ геофізичними методами характерно широке застосування крутильних терезів. В. Швейдар [27] ставить перші вимірювання на сольовому куполі в Північній Німеччині та розробляє методи редукування результатів за вплив топографічних мас. Він розробляє також крутильні ваги з фотографічною реєстрацією, які потім стала випускати фірма «Асканія» в Берліні. Компанії, виконують геофізичні дослідження, використовуючи крутильні терези для вивчення сольових куполів в

рівнинному районі Північної Німеччини, та починаючи з 1922 р на узбережжі Мексиканської затоки в США. У 1922 році корпорація Amerada Petro1eum під керівництвом Еверетта де Гольє виконує зйомку нафтоносного району Шпіндл Топ в Техасі, яка виявила додатну аномалію сили тяжіння над соляним штоком. Майже до 1940 р. крутильні терези використовуються для виявлення неглибоко розташованих, а, в подальшому, і більш глибоких соляних куполів. До 1930 року в США експлуатуються 125 приладів.

Починаючи з 1920 р істотно були вдосконалені відносні маятникові вимірювання з приладами «Штернек». Спостереження стали проводити по «двомаятниковою схемою» в вакуумі з інварними або кварцовими маятниками; трудомісткий астрономічний контроль годин був замінений прийомом сигналів за часом. Коливання маятників або моменти їх збігів з коливаннями маятника годин реєстрували фотографічним методом. Помилка виміряних пристроїв сили тяжіння зменшилася до ± 1 – 2 мГал.

Проте спостереження з маятниковими приладами та крутильними вагами залишалися все настільки ж дорогими, так як роботи тривали на кожному пункті від однієї до шести годин. Через високу чутливість до впливу топографічних мас крутильні терези можна використовувати лише в рівнинній місцевості для зйомки одиночних структур . Для швидкої зйомки великих площ були створені статичні гравіметри. У них спостерігають положення рівноваги пробної маси в полі сили тяжіння, що компенсується іншою силою зазвичай пружною деформацією, а в деяких випадках також силою скручування нитки. За зміною довжини або кута повороту, отриманими зі спостережень з приладом на двох пунктах, можна отримати приріст сили тяжіння, якщо відомий калібрувальний коефіцієнт.

Теоретичні та практичні основи цього методу були відомі давно. Р. Гук (1635 – 1702) 1678 р сформулював закон пружності, а пружинні ваги використовувалися з кінця XVII ст. С.Д. Пуассон і О.Л. Коші (1789 – 1857) внесли істотний внесок в розробку теорії пружності. Вже в 1833 р. Дж. Гершель (1792 – 1871) запропонував використовувати пружинні терези для вимірювання сили тяжіння [28], однак розробка таких приладів стала можливою лише після успіхів матеріалознавства та техніки високоточних вимірювань. У 1930 – 1950 рр. було сконструйовано близько 30 моделей різних

статичних гравіметрів, але лише мала частина з них була виготовлена в великій кількості та використана на практиці.

Ще в 1918 р Дж. Ізинг приступив до конструювання і обмеженому застосування вертикального зворотного маятника, укріпленого на горизонтальній крутильній нитці. У 1930 р Ф. Хольвек і П. Леже використовують динамічний метод вимірювань, заснований на спостереженні коливань зворотного маятника з плоскою пружиною. Ваги важелів з пружиною, створені О.Х. Труманом в 1930 р, використовуються з 1932 р нафтовою компанією Humble Oil Company. Першим приладом, виготовленим в великій кількості прримірників, були пружинні ваги з ножовий опорою, побудовані А. Шлезенером в 1934 р по розробкам Ст. фон Тіссена. Вперше в 1932 р Харлей описує вимірювальну систему з лінійною характеристикою. Точність збільшення сили тяжіння, досягнута з цими першими приладами, складає ± 0,2-0,5 мГал. Принцип вовгоперіодичного вертикального сейсмометра, запропонований в 1934 р Л.Дж.Б. Ла Костом, дозволив створити найбільш вдалий прецизійний гравіметр, який застосовується з 1939 р. Гравіметр з кварцовою пружиною, розроблений Семом П. Уорденом, широко застосовується з 1948 р в геофізичних дослідженнях. А Граф в 1938 р розробляє ваги з вертикальною пружиною, а в 1942 р - крутильні пружинні ваги; обидва прилади виготовляються фірмою «Асканія» в Берліні. Вони також знайшли широке застосування. У 1938 р А. Хойт конструює ваги з вертикальною гвинтовою пружиною, що широко використовуються компанією Gulf Oil Company на узбережжі Мексиканської затоки в США приблизно до 1960 р. Похибка вимірів з цими більш сучасними приладами становить ± 0,05-0,2 мГал. І, нарешті, відзначимо газовий гравіметр, який розроблявся Х. Хаальком починаючи з 1931 р. В ньому компенсація сили тяжіння здійснювалася тиском повітря.

Приблизно до 1939 року в розвідці нафтових родовищ статичний гравіметр майже повністю замінив крутильні ваги. Час спостережень на пунктах скоротився тепер до 10-30 хвилин. Крім великих зйомок приватних компаній (в 1945 році на території США працювало близько 170 гравіметричних бригад) гравіметричні зйомки продовжували або поновлювали також і державні організації. Їх завдання полягало в створенні опорної гравіметричної

мережі і в систематичному дослідженні геологічних структур і природних ресурсів геофізичними методами.

Завдяки піонерським роботам Ф.А. Венинг-Мейнеса стали можливі більш інтенсивні гравіметричні зйомки океанів. У 1921 р він створив двомаятниковий прилад для вимірювань на рухливій основі. Цей прилад був удосконалений до в тримаятникового для спостережень на борту зануреного підводного човна (глибина 30-80 м). З 1923 по 1960 р Нідерланди, США, Франція, Італія і СРСР здійснили експедиції, в яких визначили понад 5000 маятникових пунктів (± 3- 10 мГал).

У першій половині 20 сторіччя число гравіметричних пунктів істотно збільшилося. Н.Ф. Журавльов [29] використовував для визначення стиснення земного еліпсоїда більше 10000 пунктів, що, однак, були розподілені нерівномірно по поверхні Землі.

Подальше поширення глобальної гравіметричної мережі було продовжено маятниковими зв'язками між національними фундаментальними пунктами і зв'язками з пунктом абсолютних вимірювань в Потсдамі. Нові абсолютні вимірювання з оборотними маятниками (± 1 мГал), виконані Національним бюро стандартів у Вашингтоні та Національною фізичною лабораторією в Теддінгтоні (Великобританія), виявили, що значення сили тяжіння в Потсдамі завищено.

Теоретичні досягнення складалися в геодезичному і геофізичної напрямках гравіметричних даних. Відзначимо теоретичні роботи по ізостазії, виконані Дж. Ф. Хейфордом [30], В. Боуї [31], В.Х. Хейсканеном [32] і Ф.А. Венинг-Мейнесом [33], а також виведення за гравіметричними даними нових величин коефіцієнтів у формулах для нормальної сили тяжіння, в тому числі для тривісного еліпсоїда [34]. Міжнародна асоціація геодезії в 1930 р рекомендувала формулу сили тяжіння для нормального поля уровенного еліпсоїда [35, 36]. Ухвалою геоїда гравіметричним методом займався Г. Джеффріс [37]. Перші обчислення фігури геоїда за граваметричними даними виконані в 1934 р Хірвоненом [38]. Теоретичні основи прикладної гравіметрії заклали в 1930 - 1940 рр. Неттлтон [39], Хаммер [40], Хаальк [41], Юнг [42] та інші.

З 1940 р при зйомці континентального шельфу використовують донні гравіметри, які опускають на дно моря. З 1957 р стали застосовувати морські гравіметри [43, 44], а митників вимірювання

на підводних човнах вже стають уста¬ревшімі. У 1959 р починаються випробування таких приладів на літаках, хоча практичне використання в розвідувальній геофізиці знайшли лише вимірювання на вертольотах. Розробка гравітаційних градієнтометр (варіометрів) для літаків і супутників не завершена. Починаючи з 1960-х рр. створюються свердловинні гравіметри, призначені для розвідувальної геофізики.

Розвиток гравіметрії починаючи з 1945 р характеризується наступними досягненнями в галузі приладобудування:

-розробка прецизійних статичних гравіметрів (точність стаціонарних спостережень $\pm 10^{-8}$ м $с^2$, польових $\pm 10^{-7}$ м $с^2$);

- створення стаціонарних і транспортабельних балістичних приладів того ж рівня точності;

- створення морських гравіметрів.

Застосовуючи гравіметр Уордена, Буллард [45] показав, що пружинними гравіметрами можна вимірювати великі збільшення сили тяжіння. Термостатовані гравіметри з металевою пружиною працювали з точністю ± 0,01-0,05 мГал. До них відносяться гравіметри фірми «Асканія» з чутливою системою у вигляді крутильних пружинних ваг, що має лінійну характеристику, а також астазовані гравіметри Вестерн, Північна Америка і гравіметри Ла Коста - Ромберга, засновані на принципі сейсмометра.

З 1945 р завдяки вдосконаленню колишніх і розвитку нових теорій, а також можливості обробки даних на ЕОМ використання поліпшених гравіметричних даних в геодезії і геофізики стало більш інтенсивним.

У геодезії для встановлення світової геодезичної системи координат [46] продовжувалось уточнення фігури геоїда за гравіметричними даними [47, 48]. Завдяки теоретичним дослідженням Молоденського [49] виникають нові стимули в області визначення фізичної поверхні Землі за гравіметричними даними без будь-яких гіпотез про внутрішню будову Землі. У практику входить метод статистичної інтерполяції для передбачення параметрів гравітаційного поля в невивчених областях [50, 51]. Розробка методу середньоквадратичної колокації [52] розширює його до загального метода спільного використання геодезичних даних для визначення параметрів гравітаційного поля. Ще одне

рішення, яке враховує дискретність гравіметричних даних, дано Бьерхаммаром [53].

1.1.4. Створення гравіметричних мереж, геодезичні і геофізичні результати (друга половина 20 ст., початок 21 ст.)

Аж до 1970 р різні організації виконують абсолютні вимірювання сили тяжіння з оборотним маятником. Як і припускав Гійє [54], успіхи в вимірах коротких інтервалів часу дозволили виконати експерименти з вільним падінням пробної маси [55]. В перших експериментах в якості падаючого тіла використовувалися калібровані за довжиною стрижені і отримана точність ± 1 - 2 мГал. Одночасні вимірювання відстаней і часу за допомогою інтерферометра Майкельсона [56, 57] дозволили підвищити точність до рівня ± 0,1 мГал; перший транспортабельний прилад успішно використовувався при створенні світової гравіметричної мережі. Метод симетричного руху тіла, випробуваний Куком [58], зменшив ефект гальмування в газовому середовищі. Гравіметричний прилад, заснований на принципі вільного падіння тіла, прийнято тепер називати «абсолютним гравіметром». На рис. 1.1 показано, що за три століття точність вимірювань в гравіметрії збільшилася на 4 - 5 порядків.

Нові можливості вимірювальних приладів стимулювали створення гравіметричних мереж і розвиток гравіметричних зйомок.

Мореллі [60] і Хірвонен [61] оцінили дані, що були для земного шара до другої світової війни. Вони виявили часті розбіжності і дуже нерівномірний розподіл гравіметричних пунктів. Використовуючи маятниковий прилад Галф і гравіметри Вордена в ході виконання програми Інституту Вудс Хола і Вісконсинського університету (США), Дж. П. Вуллард створив в 1948-1960 рр. світову опорну гравіметричну мережу [62].

Починаючи з 1950 р здійснюється широкомасштабне оновлення національних гравіметричних мереж. Спочатку виконували маятникові гравіметричні визначення, пов'язуючи їх з абсолютним значенням сили тяжіння в Потсдамі.

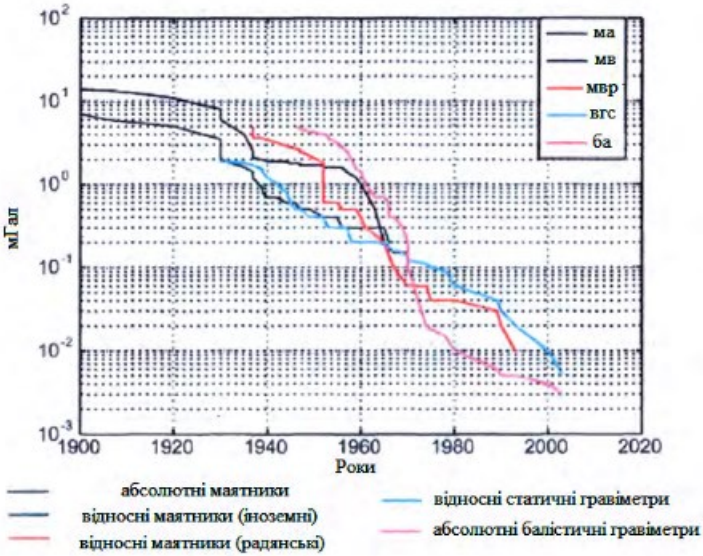


Рис. 1.1 Зменшення похибок гравіметричних приладів з часом за [59]

Починаючи з 1958 р аналіз збурень орбіт штучних супутників Землі дозволяє отримати інформацію про довгохвильову частину земного гравітаційного поля. Вже на самій ранній стадії цей метод дозволив отримати величини полярного стиснення і асиметрії півкуль [63, 64] більш точно, ніж за наземними даними. Великого значення набуває спільна обробка супутникових і наземних даних [65].

У геофізики починаючи з 1960 р завдяки впровадженню ЕОМ істотно розширюються можливості моделювання розподілу мас в тілі Землі на основі гравіметричних даних. Стало простіше оцінювати вплив топографічних мас і збурюючих мас земної кори, а за залишковими аномаліями сили тяжіння за допомогою інтегрування або диференціювання обчислювати інші характеристики поля з мінімальними додатковими витратами. Підбір моделей розподілу мас в тілі Землі, що відповідають гравіметричним даними, здійснюється послідовними наближеннями з використанням чисельних і аналітичних методів [66, 67].

Застосування методів спектрального аналізу [68, 69] відкриває нові можливості в інтерпретації потенціальних полів. Зрозуміло, неоднозначність в рішенні оберненої задачі гравіметрії не може бути дозволена вдосконаленням методів обчислень [70]. Сучасні методи геолого-геофізичної інтерпретації використовують різнорідні дані і орієнтовані на оптимальне використання інформації, що міститься в них. Локальні і регіональні аномалії сили тяжіння мають важливе значення для прикладної геофізики і геофізичних зйомок, а великомасштабні особливості гравітаційного поля містять інформацію про глибинні маси. Ці особливості і вносять основний внесок в розробку геодинамічних моделей, зокрема при вивченні тектоніки літосферних плит.

Надалі активізувалася міжнародна робота по встановленню світової гравіметричної мережі. Міжнародна гравіметрична стандартизаційна мережа (МГСС-71) заснована в 1971 р. здебільшого на абсолютних вимірах сили тяжіння з балістичними гравіметрами і відносних вимірах з гравіметрами Ла Коста - Ромберга [71]. Поправка в Потсдамську гравіметричну систему склала близько -14 мГал. З 1975 р мережа МГСС-71 удосконалюється завдяки новим спостереженнями з балістичними приладами і пружинними гравіметрами. Одночасно робляться спроби створити систему більш високого рівня точності на основі декількох постійних абсолютних станцій.

З початку 1970-х рр. нові зйомки відносять до системи МГСС-71 і часто поєднують абсолютні та відносні вимірювання.

З 1975 р в геодезії починають застосовувати інерційні геодезичні системи. Ці системи можна використовувати також для згущення гравіметричної зйомки.

До 1987 року база гравіметричних даних Міжнародного гравіметричного бюро містить вже близько 3,5 млн пунктів. Понад 11 млн значень зберігається в базі даних Агентства оборонного картографування США, частина з них недоступна для широкого користування системою із зазначених причин.

Гравіметрична вивченість Землі за наземними і морськими гравіметричними зйомками до середини 80-х років XX ст. була дуже нерівномірною, а в даний час гравіметричними зйомками покриті значні площі як на континентах, так і на морях і океанах.

Наведемо загалом узагальнені відомості про загальну картину

гравіметричної вивченості початку 21 сторіччя [72, 59].

Гравіметрична вивченість держав Європи переважно покрита детальними гравіметричними зйомками, але для деяких країн (колишня Югославія, Албанія) взагалі немає матеріалів гравіметричних зйомок або дуже мало цих даних (Греція). Складено карту аномалій Буге Міжнародним гравіметричним бюро у масштабі 1:10 000 000 на територію Західної Європи і Північну Африку.

Гравіметрична вивченість держав Азії є дуже нерівномірною. Так, гравіметричні зйомки інтенсивно проводять у більшій частині території країн (Індія, Японія, Сирія, Ірак), водночас у багатьох державах Азії залишаються невивченими високогірні області Тибету та Гімалаїв, а також території Туреччини, Південного Афганістану.

За останні роки є значний прогрес у розвитку гравіметричних зйомок на Африканському континенті. Але гравіметрична вивченість держав Африки є дуже неоднорідною. Найкраще вивчена північно-західна частина Африканського континенту, менш вивчені північно-східні і південно- східні райони Африки.

Гравіметрична вивченість Північної Америки більш однорідна, ніж Азії і Африки. На території США і більшої частини Канади є складені гравіметричні карти масштабу 1:250000. Порівняно слабше вивчені Аляска, західні та північні райони Канади. Слабко вивчені значні території Мексики і Центральної Америки. Держави Південної Америки також вивчені дуже слабко. У значному ступені покриті гравіметричним зніманням лише Аргентина, Чилі й Уругвай.

Достатньо рівномірно вивчена територія Австралії та акваторія до неї шельфу. Більша частина території суходолу покрито детальними зйомками.

Вивченням гравітаційного поля Антарктиди та прибережних районів океану займались у багатьох країнах світу. Гравіметричними вимірюваннями займались у колишньому СРСР, США, Японія, Англія, Австралія, Франція, Нова Зеландія, Бельгія, Чилі. Загалом в Антарктиді, за даними таких досліджень, створено близько восьми тисяч гравіметричних пунктів.

Гравіметричні дослідження у Світовому океані проводили спеціалісти колишнього СРСР, США, Японії, Австралії, Нідерландів, Канади, Англії, Італії, Данії і багатьох інших держав.

На акваторії Світового океану найкраще вивченим є Атлантичний океан. За осередненими аномаліями за трапеціями 1°x1° у північній і центральній частинах океану майже немає невивчених областей. Гірше вивчена південна частина океану, особливо у самих південних широтах. Складені гравіметричні карти в трьох редукціях - аномаліях у вільному повітрі, Буге та ізостатичних.

В Індійському океані достатньо добре вивчені лише акваторії північної півкулі, у південній півкулі прокладені лише окремі гравіметричні маршрути. На акваторію Індійського океану складена гравіметрична карта масштабу 1:5 000 000 для геолого-геофізичного атласу Індійського океану. Також опублікована гравіметрична карта осереднених аномалій Буге за трапеціями 1°x1 °.

Гравіметрична вивченість Тихого океану істотно покращена за останні роки. Добре вивчена північна частина океану, дещо гірше вивчена центральна частина і тільки прокладені окремі маршрути надводних гравіметричних вимірювань у південних областях океану.

У Північно-Льодовитому океані гравіметричними зйомками покрита значна частина прибережних районів і південна частина океану масштабу 1:1 000 000, враховуючи шельф Росії.

Суттєвим доповненням гравіметричної вивченості Світового океану, які отримані за безпосередніми морськими гравіметричними вимірюваннями, слугує інформація про гравітаційне поле з використанням даних супутникової альтиметрії. За такими спостереженнями визначені аномалії у вільному повітрі для трапецій 15'x15', отриманих у Міжнародному гравіметричному бюро за даними із ШСЗ «Seasat» і «Geos-3» для акваторій Світового океану, обмеженими паралелями 72° північної широти і 60° південної широти, а також з використанням геодезичних програм ШСЗ «Geosat» і «ERS-1».

У досупутниковий час гравітаційне поле було відомим з високою точністю тільки в деяких регіонах світу й отримане за допомогою наземних і на борту літаків вимірювань. У цей час детальність поля прискорення вільного падіння для потреб геодезії, геофізики і океанографії оцінюється величиною 1 мГал для гравіметричних аномалій, а відповідна точність висот геоїда (квазігеоїда) від 1 до 2 см. Отже, потреба в точному визначенні гравітаційного поля Землі є очевидною.

На початку 80-х рр. знову зростає інтерес до авіаційних гравіметричних зйомок. Тут слід виділити роботи, що проводяться в США Naval Research Laboratory (JM Brozena, MF Peters), а в Канаді - кафедрою Geomatics Engineering Університету Калгарі (K. P. Schwartz).

У ці роки відбувається осмислення можливостей супутникової навігаційної системи GPS, як засобу високоточного позиціонування. Морські гравіметри (в основному Ла Коста - Ромберга) допрацьовуються під розширений динамічний діапазон прискорень, що виникають при авіаційних зйомках. Використовуються досягнення в мікропроцесорній техніці; приладобудуванні, особливо в частині інерційних систем навігації; методах обробки інформації. Розширюється міжнародне співробітництво, в проекти авіаційної гравіметрії залучаються вчені різних країн світу: Канади, США, Японії, Німеччини, Англії, Нідерландів, Франції, Фінляндії.

На початку 90-х років відбулася якісна зміна в авіаційній гравіметрії. Почався активний етап розробки та впровадження в практику промислових авіаційних гравіметричних систем. Це було викликано повноцінним розгортанням високоточної супутникової навігаційної системи GPS з достатнім числом навігаційних супутників, що рівномірно покривають земну поверхню; досягненнями в мікропроцесорній техніці, що дозволили вирішити багато проблем вдосконалення чутливих елементів гравіметричних комплексів, систем реєстрації і синхронізації інформаційних потоків; якісно новими можливостями персональних комп'ютерів; появою нових можливостей приладової інтеграції інерційних систем навігації з гравіметрами нового покоління; підтримкою гравіметричних проектів на державному рівні та активним залученням приватних інвестицій.

1.1.5 Сучасний стан гравіметричної вивченості України

Побудова нових гравіметричних мереж у різних країнах стало необхідними завдяки появі Міжнародної стандартної гравіметричної мережі (IGSN-71), підвищенні вимог до точності і надійності мереж, можливості використовувати нові абсолютні та відносні прилади, нові методики вимірювань, а також зростання

інтересу до моніторингу часових вимірювань прискорення вільного падіння тощо [59].

Державна гравіметрична мережа України є основою для виконання гравіметричних досліджень, які спрямовані на вивчення гравітаційного поля і зовнішньої фігури Землі та їхніх змін з плином часу, виконання інших наукових і народногосподарських завдань та метрологічного забезпечення гравіметричних зйомок. Вона слугує єдиною гравіметричною системою на території України. Високоточну державну гравіметричну мережу ділять на Державну фундаментальну гравіметричну мережу (ДФГМ) і Державну гравіметричну мережу 1-го класу (ДГМ-1).

До початку 60-х років XX ст. в Україні існувало лише три маятникові пункти опорної гравіметричної мережі I класу, які були визначені Центральним науково-дослідним інститутом геодезії і картографії (ЦНДІГіК) СРСР. Ці пункти перебували в підвальних приміщеннях фундаментальних будівель міст Полтава, Харків і Одеса.

Надалі в зв'язку з появою нових, точніших гравіметрів, упродовж 1965-1970 років Інститут фізики Землі АН СРСР на території СРСР побудував опорну гравіметричну мережу I класу, яка на території України, охоплювала вищезгадані пункти плюс опорний пункт в аеропорту «Жуляни» міста Київ. Мережа складалася із системи замкнутих полігонів, прив'язаних до маятникових пунктів, та мала прямі зв'язки з пунктом «Москва» (клас А) - головним опорним пунктом СРСР. Середня квадратична похибка передачі абсолютних значень прискорення сили тяжіння (ПСТ) на пунктах становила ±0,035 мГал [73]. Останній раз роботи зі створення в Україні Державної опорної гравіметричної мережі I класу (ДГМ-I класу) проводилось у 1979-1983 роках.

Державна гравіметрична мережа України як складова гравіметричної мережі СРСР залучала до свого складу гравіметричні мережі I, II, III класів. Наявна гравіметрична мережа України I класу складалася зі 17-ти основних пунктів, одного вихідного фундаментального гравіметричного національного пункту Полтава та 37-ми рядових пунктів.

Наразі державна гравіметрична мережа I класу країни, створена ще за часів існування СРСР, оцінюється зі середньою квадратичною похибкою значення прискорення вільного падіння пунктів

приблизно в 30 мкГал. Зауважимо, що пункти державної гравіметричної мережі II класу не забезпечують за точністю обґрунтування гравіметричної зйомки масштабу 1: 50 000 і більше. На початку XXI ст. у зв'язку з масовим запровадженням супутникових технологій визначення місцеположення географічних об'єктів місцевості, а особливо з розвитком методів ОР8-нівелювання, які дають можливість визначати висоти над рівнем моря, виникла потреба побудови високоточної моделі поверхні квазігеоїда для всієї території України на базі достовірної й точної гравіметричної інформації. [73, 74].

Для певної території України на даний час існує невідповідність гравіметричної мережі за якістю й щільністю пунктів, що не дає змогу в межах європейських проектів здійснити її у зв'язку з нівелірними мережами сусідніх країн, побудувати модель квазігеоїда сантиметрової точності. Тільки за умови поєднання високоточного гравіметричного вимірювання на базі зйомок масштабу 1:50 000 та більше з супутниковими геодезичними спостереженнями можна побудувати нову, інтегровану у світову, систему геодезичного забезпечення країни [75, 76].

Упровадження в практику гравіметричних робіт абсолютних балістичних гравіметрів високої точності й супутникових технологій для визначення просторових геодезичних координат зумовлює необхідність модернізації мережі на новому рівні точності.

В роботах українських вчених, що присвячені гравіметрії:

- висвітлені питання теорії і практики вирішення інтерпретаційних завдань потенційних полів;
- розглянуті класичні задачі для геологічної інтерпретації гравірозвідувальних польових вимірювань;
- описані методи інтерпретації гравітаційних і магнітних аномалій, аналітичні методи інтерпретації гравіразведочних аномалій;
- приділена увага для вирішення прямих і зворотних задач гравіметрії в обраних класах рішення, зокрема, кульових, матеріальних стрижневих, блочно побудованих, тривимірних зіркових тіл класу Тихонова, Стрітенського, а також класів контактних поверхонь, горизонтально шаруватої моделі [77-98].

Методи інтерпретації гравітаційних спостережень і теоретичні основи розвідувальної гравіметрії викладені в працях Н.М.Нікіфорова, Б.В. Нумерова, Г.А. Гамбурцева, Б.А. Андрєєва, А.К. Маловичко і ін. вчених. На основі цих досліджень вирішені завдання геологічного тлумачення гравітаційних аномалій.

Розрахунок гравітаційного ефекту тіл заданої форми, визначення накладення форми, розмірів тіла за результатами гравіметричних вимірювань розглядаються в роботах Г.А. Гамбурцева, Д.С. Мікова, А.А. Непомнящего, О.Н. Шванкина, К.Ф. Тяпкіна, А.К. Маловичко.

Поділ гравітаційного ефекту декількох тіл, вираження одних характеристик поля через інші, трансформації поля наводяться працях О.М. Тихонова, Н.Г. Клушина, К.В. Гладкова, Страхова,

Залученню апарату функції комплексного змінного для інтерпретації гравітаційних аномалій присвячені роботи. С.В. Шалаєва, В.Н. Страхова,

Використання методів інтегральних перетворень, а також теорії випадкових функцій розглядаються в роботах К.В. Гладкого, Н.Т. Клушина, С.С. Серкерова, Л.А. Халфина.

У методику комплексної інтерпретації результатів гравітаційних і геологічних досліджень внесли роботи А.Д. Архангельського, В.В. Фединського, Д.Н. Година, Е.Е. Фотіаді, Б.А. Андрєєва, С.І. Суботіна.

А.І. Кобрунов є продовжувачем ідей В.Н.Страхова і А.Н. Тіхонова. Ними розроблені теоретичні основи розв'язку обернених задач гравиразведки.

Найбільш відомі гравіметрісти початку XXI ст. - це вчені Булах В.Г., Мартишко, Нікітін, Ломтадзе, Антонов і ін.

1.2. Закон Всесвітнього тяжіння. Гравітаційна стала G

Відповідно до закону всесвітнього тяжіння, що був відкритий наприкінці XVII ст. Ньютоном, всі тіла притягаються одне до одного з силою, яка пропорційна їхній масі та обернено пропорційна квадрату відстані між ними [99]. Якщо маси

зосереджені в нескінченно малому об'ємі (точкові маси), закон Всесвітнього тяжіння має вигляд:

$$F = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (1.1)$$

де G – гравітаційна стала (G=6,673 $\cdot 10^{-11}\frac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}$); m і m_2– маси, що взаємодіють; r – відстань між точками.

Коефіцієнт G – одна з фундаментальних констант фізики, механіки та астрономії. Із законів Кеплера можна виразити маси всіх планет через масу Сонця. Однак, щоб знайти масу Сонця і, відповідно, маси інших планет, необхідно знати гравітаційну сталу. Взагалі кажучи, знання цієї сталої дозволяє розрахувати силу взаємодії будь-яких тіл.

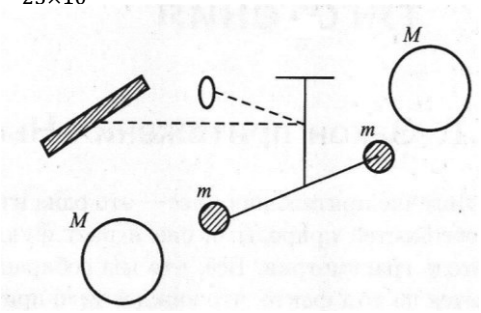
Чисельне значення гравітаційної сталої залежить від системи одиниць, в якій визначаються сили, маси та відстані . Її значення знайдено експериментально за допомогою вимірювання сили гравітаційного притягання між двома тілами з відомими масами, розташованими на заданій відстані одне від одного. Для тіл незначних розмірів ця сила істотно мала; з цієї причини величина гравітаційної сталої залишалася невідомою протягом більш ніж двох століть. У 1792 році Кавендішем ця проблема була вирішена за допомогою крутильних терезів. Раніше той же самий підхід був застосований Кулоном при вивченні сил електростатичного притягання і відштовхування. Ваги Кавендіша складаються з двох невеликих сфер однакової маси m (рис. 1.2, а), що розташовані на протилежних кінцях легкого горизонтального стрижня, підвішеного за середину на вертикальній нитці (кварцовій нитці). Маленьке дзеркало, розміщене на нитці, відбиває промінь світла на шкалу. При використанні ваг дві відносно великі сфери масою M, виготовлені зазвичай зі свинцю, підносять до мас m. Сили гравітаційного притягання між малою та великою сферами утворюють пару , яка закручує нитку та дзеркало разом з нею. Разом з тим, промінь світла переміщується по шкалі. Пружна сила нитки компенсує зовнішню силу, так що

$$\vec{F}L = \mu\emptyset,$$

де $\overrightarrow{F}$ – сила взаємодії між масами m і M, L – довжина стрижня, μ– коефіцієнт пружності нитки, $\emptyset$ – кут закручування.

При використанні дуже тонкої нитки відхилення променю світла може бути достатньо великим для вимірювання гравітаційних сил, що залежать від невідомої сталої G, з досить великою точністю. Звичайно, для цього потрібно звести до мінімуму різні завади, такі, як вплив зарядів на поверхні мас. Відзначимо , що вираз для F передбачає, що сферичні маси взаємодіють як частинки, і це припущення буде доведено пізніше. Для оцінки величин в цьому експерименті розрахуємо силу гравітаційного притягання між малою і великою сферами у вагах Кавендіша, коли, $m = 10^{-3}$ кг, $M = 0{,}5$ кг,а відстань між їх центрами 0,05 см. Тоді

$$\vec{F} = \frac{6{,}67\times10^{-11}\times10^{-3}\times0{,}5}{25\times10^{-4}} = 0{,}13\times10^{-10}\ \text{Н}.$$



а б

Рис. 1.2 Ілюстрація закону притягання Ньютона (дослід Кавендіша) за [99]

Звичайно ж, це екстремально мала величина, з цієї причини визначення гравітаційної сталої з високою точністю вимагає досить складних експериментів. Протягом останніх двохсот років було проведено багато вимірів цієї сталої, проте з достатньою надійністю визначені тільки три цифри після коми. При цьому похибка визначення складає три одиниці останнього знаку. Виміри Кавендіша зробили величезний внесок в розробку теорії тяжіння та при оцінці маси Землі.

Повертаючись до рівняння (1.1), зазначимо, що сила F є векторною величиною, оскільки вона має цілком визначену величину та напрямок. (рис.1.3).

Точка m_1 притягує точку m_2, що віддалена від неї на відстань r, з силою F, яка направлена по прямій від точки m_2 до точки m_1та

прикладеної до точки m_2. Відповідно, точка m_2 так само притягує точку m_1 з силою F, що прикладена до m_1 та направленій від m_1 до m_2.

Будемо вважати, що відрізок r направлений від точки, що притягує, до точки, яка притягується. В цьому випадку вектор $\vec{F}$ завжди має різний напрямок з вектором $\vec{r}$. Саме цим пояснюється знак «мінус» перед виразом сили притягання.

Вираз для сили притягання можна представити у векторній формі:

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \qquad (1.2)$$

Взаємодія між усіма небесними тілами підпорядковується закону Всесвітнього тяжіння, саме завдяки ньому визначається порядок руху планет навколо Сонця та взаємне притягання всіх мас Землі.

1.3. Сила тяжіння та її складові. Напруженість гравітаційного поля

Якщо силу віднести до одиничної маси $m_1 = 1$, то точкова маса $m_1 = m$ буде притягувати цю одиничну масу з силою

$$\vec{g} = -G\frac{m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \qquad (1.3)$$

Ця сила дорівнює чисельно прискоренню, яке створюється притяганням маси m на відстані r.

У випадку притягання одиничної маси масою, що складається з окремих точок, вираз (1.1) набуває вигляду:

$$\vec{g} = -G\sum_i \frac{m_i}{r_i^2}, \qquad (1.4)$$

а в випадку неперервного розподілу мас сума замінюється інтегралом

$$\vec{g} = -G\int_\tau \frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}dm, \qquad (1.5)$$

який обчислюється по об'єму τ, що займають збурюючі маси.

Величина g характеризує напруженість сили притягання.

У кожній точці поля Землі можна визначити відношення сили, що діє на точкове тіло, до маси цього тіла. Це відношення не залежить

від речовини тіла та дорівнює прискоренню, що надається силою притягання в даній точці поля:

$$g=-G\frac{M}{R^2}, \qquad (1.6)$$

де M – маса Землі; R – відстань від центру Землі до точки, що притягується.

Крім сили притягання, на маси Землі діє відцентрова сила, яка викликана добовим обертанням Землі навколо своєї осі. Вона пропорційна радіусу обертання та квадрату кутової швидкості ω:

$$\vec{P}=\vec{\rho}\omega^2 m. \qquad (1.7)$$

Як і в випадку з силою притягання, віднесем цю силу до одиничної маси та отримаємо напруженість відцентрової сили, або відцентрове прискорення $\vec{\rho}\omega^2$. Сума напруженості сили притягання та напруженості відцентрової сили і є силою тяжіння, або точніше – напруженістю сили тяжіння:

$$\vec{g}=-G\int_\tau \frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}dm+\vec{\rho}\omega^2. \qquad (1.8)$$

Це свідчить про те, що кожній точці простору на поверхні Землі або поблизу неї можна поставити в відповідність єдино можливе, незалежне від маси, яка зазнає впливу дії, значення напруженості поля сили тяжіння g. Цей простір називається гравітаційним полем Землі. В гравіметрії за давно прийнятою термінологією кажуть про силу тяжіння, маючи на увазі напруженість силового поля Землі.

За одиницю прискорення сили тяжіння в системі СІ прийнято прискорення, що розвиває тіло масою 1 кг під дією сили 1 Н, і має розмірність [м·с$^{-2}$]. В практиці гравіметричних досліджень, в першу чергу, польових використовується позасистемна одиниця «мілігал» (1 Гал=1см·с$^{-2}$, 1 мГал=1·10^{-3} Гал). В останні роки в зв'язку з використанням сучасних автоматизованих переносних гравіметрів та істотним підвищенням точності гравіметричних зйомок використовується ще більш дрібна одиниця сили тяжіння – мікрогал (1 мкГал=1·10^{-6} Гал=1·10^{-8} м·с$^{-2}$).

Середнє значення сили тяжіння на поверхні Землі складає 979,7 Гал. Повна зміна сили тяжіння від екватора до полюса складає близько 5,2 Гал (g_e=978.0 Гал, $g_п$=983,2 Гал). Тоді відносна величина зміни сили тяжіння складає:

$$\beta=\frac{g_п-g_e}{g_e}={}^{1}/_{189} \qquad (1.9)$$

Сила притягання значно перевищує дію відцентрової сили та визначає, в основному, величину та напрямок сили тяжіння (рис.1.4), відношення максимального значення відцентрової сили (на екваторі) до мінімального значення сили тяжіння (на екваторі) складає $\frac{\omega^2 a}{g_e} = \frac{1}{288}$, приймаючи кутову швидкість

$$\omega = \frac{2\pi}{86164{,}1} = 0{,}729212 \cdot 10^{-4},$$

де $86164{,}1$ – число середніх секунд в зоряній добі, більшу напіввісь Землі a=6 378 245 м за Красовським, g_e=978030 за Гельмертом. Відцентрова сила змінюється від нулю на полюсах, до значення $\omega^2 a \approx 3{,}4$ Гал на екваторі. Вона направлена від осі обертання Землі та перпендикулярно до неї (рис. 1.3). Таким чином, відцентрова сила P зменшує силу тяжіння на величину $\omega^2 a \cos\varphi$, де φ – широта точки спостереження. Зміна відцентрової сили, в основному, визначає нормальну зміну напруженості гравітаційного поля від екватора до полюсів. Крім того, слід враховувати вплив стискання Землі, що також збільшує напруженість поля біля полюсів.

Крім цих двох постійно діючих складових, на силу тяжіння впливає ще ряд факторів, в першу чергу, притягання Місяця та Сонця. Їхній вплив відносно незначний і носить, переважно, періодичний характер. Проте при високоточних гравіметричних дослідженнях, при розбивці опорних сіток спостережень та при детальних гравіметричних зйомках, коли вишикувані аномалії складають одиниці або частки мілігала, цими чинниками не можна нехтувати та необхідно враховувати. Про їхнє врахування піде мова в наступних розділах.

1.4. Вага

Вага тіла – сила, з якою тіло діє на горизонтальну підставку або на вертикальний підвіс внаслідок гравітаційного тяжіння до Землі. При цьому передбачається, що тіло нерухомо щодо опори або підвісу. Нехай тіло лежить на нерухомому щодо Землі горизонтальному столі. Це визначення відноситься до системи відліку, пов'язаної з підставкою або підвісом. Воно відповідає практиці визначення ваги в земних умовах на пружинних вагах.

На тіло діють сила тяжіння $F_T = mg$, спрямована вертикально вниз, і сила $F_у = N$, з якою опора діє на тіло. Силу N називають силою нормального тиску або силою реакції опори. Сили, що діють на тіло, врівноважують один одного: $F_{Ту} = F = -N$. Відповідно до третього закону Ньютона тіло діє на опору з деякою силою P, що дорівнює по модулю силі реакції опори і спрямованої в протилежну сторону:

$$P = -N.$$

Силу P називають вагою тіла.

Якщо тіло нерухомо висить на пружинних вагах, то роль сили реакції опори (підвісу) грає пружна сили пружини. За розтягування пружини можна визначити вагу тіла і рівну йому силу тяжіння тіла Землею. Для визначення ваги тіла можна використовувати також і ваги важелів, порівнюючи вагу даного тіла з вагою тягарців на рівноплечому важелі. Зрівноваживши ваги важелів шляхом зрівнювання ваги тіла сумарною вагою гир, ми одночасно досягаємо рівності маси тіла сумарною масі гир, незалежно від значення прискорення вільного падіння в даній точці земної поверхні. Наприклад, при підйомі в гори на висоту 1 км показання пружинних ваг змінюються на 0,0003 від свого значення на рівні моря. При цьому рівновага ваг зберігається. Тому ваги важелів є приладом для визначення маси тіла шляхом порівняння з масою гир (еталонів).

Якщо зважується тіло, що рухається горизонтально щодо поверхні Землі, і його рух прямолінійний і рівномірний, наприклад, у вагоні поїзда, то результат буде той же, що і при зважуванні на земній поверхні.

У всіх інерційних системах відліку вага тіла одна і та ж і у випадку вакууму чисельно дорівнює силі тяжіння. За третім законом Ньютона, вага у відсутності сили, що виштовхує, дорівнює за величиною і протилежна за направленням силі нормальної реакції горизонтальної підставки (або силі натягу вертикального підвісу). У свою чергу, згідно з другим законом Ньютона, ця сила дорівнює за величиною і протилежна за напрямком силі тяжіння, тобто під дією цих сил тіло покоїться або рухається прямолінійно і рівномірно.

Таким чином, вага тіла за величиною дійсно збігається з силою тяжіння в інерційних системах відліку.

Однак ці дві сили не можна ототожнювати, тобто вага тіла - це сила, прикладена до підставки або підвісу з боку тіла, тоді як сила

тяжіння прикладена до тіла з боку Землі. В неінерційній системах відліку вага тіла різниться від сили тяжіння за величиною.

Певно, має сенс розрізняти:

- Силу притягання тіл до Землі за законом всесвітнього тяжіння. Ця сила притягання не залежить від обертання Землі і від того, покоїться або рухається дане тіло в поле тяжіння Землі;

- Силу тяжіння – це різниця між силою притягання і відцентровою силою інерції. Спостережуване на Землі прискорення вільного падіння повідомляється тілам силою тяжіння. Лише нехтуючи відцентровою силою інерції в порівнянні з силою притягання, можна вважати, що прискорення вільного падіння дорівнює прискоренню сили притягання. На полюсі відцентрова сила інерції дорівнює нулю і сила тяжіння дорівнює силі притягання; на екваторі різниця між цими силами має максимальне значення;

- Вага тіла, тобто сила, з якою тіло діє на опори, що перешкоджають його вільному падінню. Для тіла, що знаходиться в спокої, вага дорівнює силі тяжіння. Вага тіла з'являється тільки в тому випадку, якщо тіло змушене рухатися з прискоренням, відмінним від прискорення вільного падіння. Це можливо, якщо на тіло, крім сили притягання, діють і інші сили. Вагою тіла є та сила, з якою дане тіло діє на інші тіла, що перешкоджають його вільному руху в полі притягання. Якщо ж тіло рухається тільки під дією сили притягання, то воно є невагомим (при цьому траєкторія руху може бути будь-якою: прямолінійною, параболічною, еліптичною або круговою).

Для того, щоб в поле тяжіння Землі дане тіло рухалося з прискоренням a, відмінним від g, до нього має бути додана з боку інших тіл додаткова сила N, яка задовольнить умові:

$$N + F = ma.$$

Тоді вага тіла, а саме сила, з якою дане тіло діє на інші тіла, буде дорівнювати:

$$P = -N = mg - ma = m\,(g - a). \qquad (1.10)$$

Якщо тіло покоїться або рухається прямолінійно і рівномірно, то $a = 0$ і $P = mg$. Якщо тіло вільно рухається в полі тяжіння по будь-якій траєкторії і в будь-якому напрямку, то $a = g,\ P = 0$, і тіло буде невагомим.

При будь-якому русі тіла в гравітаційному полі іншого тіла завжди діє сила притягання. Вага ж з'являється тільки в тому випадку, коли на дане тіло, крім сили тяжіння, діють ще й інші сили, внаслідок чого тіло змушене знаходитися в спокої або рухатися з прискоренням, відмінним від g.

1.5. Невагомість

Коли тіло покоїться в полі притягання Землі на горизонтальній площині, на нього діють сила тяжіння та чисельно рівна їй, але протилежно спрямована сила – реакція площини (опори). В результаті в тілі виникають внутрішні зусилля у вигляді взаємних тисків часток один на одного. Людський організм сприймає такі внутрішні зусилля як звичний стан вагомості. З'являються ці внутрішні зусилля за рахунок дії реакції опори.

З формули (1) видно, що якщо $a < g$, то вага тіла P, що знаходиться в ліфті, який рухається прискорено (рис. 1.5) менше сили тяжіння. Якщо $a > g$, то вага тіла змінює знак.

Це означає, що тіло притискається ні до підлоги, а до стелі кабіни ліфта ("негативна" вага).

Нарешті, якщо $a = g$, то $P = 0$. Тіло вільно падає на Землю разом з кабіною. Такий стан називають невагомістю.

Невагомість - стан тіла, коли його вага дорівнює нулю, тобто такий стан механічної системи, при якому гравітаційне поле, що діє на систему, не викликає тисків частинок системи один на одного. Будь-яке вільно падаюче тіло, що рухається тільки під дією сили тяжіння, знаходиться в стані невагомості.

При русі космічного корабля навколо Землі його прискорення дорівнює прискоренню сили тяжіння (прискорення вільного падіння), тобто супутник знаходиться в стані вільного падіння. Тому сила тиску космонавта на опору дорівнює нулю. Для тренувань космонавтів стан невагомості створюється на нетривалий час під час контрольованого вільного падіння літака.

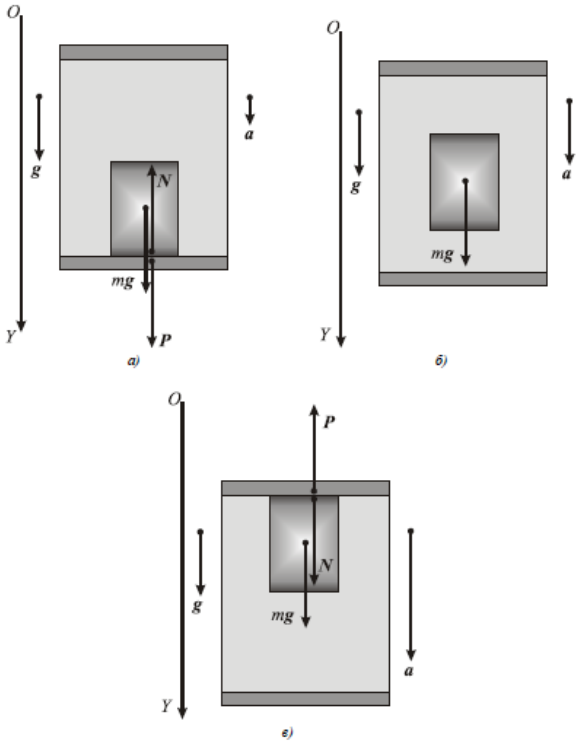


Рис. 1.5 Вага тіла, що знаходиться в ліфті, який рухається прискорено Вектор прискорення направлений вертикально вниз.

а – $a < g, P < mg$, b – $a = g, P = mg$ (невагомість), в – $a > g, P < 0$

1.6. Космічні швидкості

Штучні супутники Землі (ШСЗ) рухаються за межами земної атмосфери, і на них діють тільки сили тяжіння з боку Землі. Залежно від початкової швидкості траєкторія космічного тіла може бути різною. Розглянемо випадок руху ШСЗ по навколоземній орбіті, близькій до кругової. Такі супутники літають на висотах близько 200 – 300 км, і можна наближено прийняти відстань R до центру Землі рівним її радіусу $R_з$. Тоді нормальне прискорення супутника, яке

передається йому силами тяжіння, приблизно дорівнює прискоренню вільного падіння g.

Якщо якийсь об'єкт (наприклад, ШСЗ) обертається по круговій орбіті на висоті, яка дуже мала в порівнянні з радіусом Землі, то його швидкість називають першою космічною швидкістю. Це найменша швидкість, яку треба передати тілу для перетворення його в супутник Землі.

Рух супутника можна розглядати як вільне падіння, подібне руху снарядів або балістичних ракет. Різниця полягає лише в тому, що швидкість супутника настільки велика, що радіус кривизни його траєкторії перевищує радіус Землі.

Фактично значення першої космічної швидкості залежить від висоти h над Землею. На тіло масою m, що рухається на висоті h над Землею, за законом всесвітнього тяжіння, діє сила:

$$F = G\frac{Mm}{(R+h)^2}. \qquad (1.11)$$

де M і R – маса і радіус земної кулі.

В даному випадку прискорення вільного падіння грає роль нормального прискорення тіла, що рухається по круговій орбіті навколо Землі (супутника). З другого закону Ньютона:

$$F = \frac{mv_1^2}{R+h}. \qquad (1.12)$$

Тоді перша космічна швидкість за відсутності атмосфери дорівнюватиме круговій швидкості:

$$v_1 = \sqrt{G\frac{M}{R+h}} = \sqrt{g(R+h)}, \qquad (1.13)$$

$$v_1 = \sqrt{gR} = \sqrt{9{,}80665 \cdot 10^{-3} \cdot 6{,}371032 \cdot 10^3} \approx 7{,}91\ {}^{\text{км}}/_{\text{с}}. \qquad (1.14)$$

При обчисленнях використані середній радіус Землі та нормальне значення прискорення вільного падіння. Рухаючись з такою швидкістю, супутник облітав би Землю за час:

$$T_1 = \frac{2\pi R_{\text{с}}}{v_1} = 84\text{хв. } 12\text{с}. \qquad (1.15)$$

Насправді період обертання супутника по круговій орбіті поблизу поверхні Землі трохи перевищує вказане значення через відмінності між радіусом реальної орбіти ШСЗ і радіусом Землі.

Для супутників, що рухаються по кругових траєкторіях на значній відстані від Землі, земне тяжіння слабшає обернено

пропорційно квадрату радіусу r траєкторії. Швидкість супутника v знаходиться з умови:

$$\frac{v^2}{r} = g\frac{R_c^2}{r^2}, \qquad v = \sqrt{gR_c}\sqrt{\frac{R_c}{r}} = v_1\sqrt{\frac{R_c}{r}}, \quad (1.16)$$

$$\frac{v_0}{v_1} = \sqrt{\frac{R_1}{R_0}}, \quad (1.17)$$

де v_0 – швидкість обертання по орбіті R_0, а v_1 – швидкість обертання по орбіті R_1. При h =0 $v_1 \approx 7{,}91$ км $\cdot$ с$^{-1}$; для висоти 300 км $v_1 \approx 7{,}7$ км $\cdot$ с$^{-1}$; а для висоти 20 000 км $v_1 \approx 3{,}9$ км $\cdot$ с$^{-1}$.

Зауважимо, що при запуску штучного супутника його початкова швидкість повинна бути спрямована по дотичній до земної поверхні. Період обертання T супутника:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{v_1}\sqrt{\frac{r}{R_з}} = \frac{2\pi R_c}{v_1}\frac{r^{3/2}}{R_c} = T_1\frac{r^{3/2}}{R_c}, \quad (1.18)$$

де T_1 – період обертання супутника на навколоземній орбіті. Період обертання супутника зростає зі збільшенням радіуса орбіти. Якби Земля була однорідним шаром, і не існувало б атмосфери, то супутник рухався б по орбіті, площина якої зберігає незмінну орієнтацію в просторі щодо системи нерухомих зірок. Елементи орбіти в цьому випадку визначаються законами Кеплера. Так як Земля обертається, то при кожному наступному обороті супутник рухається над різними точками земної поверхні. Знаючи трасу супутника за один який-небудь оборот, неважко передбачити його положення в усі наступні моменти часу. Для цього необхідно врахувати, що Земля обертається із заходу на схід з кутовою швидкістю приблизно 15 градусів на годину. Тому на наступному обороті супутник перетинає ту ж широту на захід на стільки градусів, на скільки Земля повернеться на схід за період обертання супутника.

Через опір земної атмосфери супутники не можуть довго рухатися на висотах нижче 160 км. Мінімальний період обертання на такій висоті по круговій орбіті дорівнює приблизно 88 хв. За цей час Земля обертається на 22,5 градуси. На широті 50 градусів цьому куту відповідає відстань в 1400 км. Отже, можна сказати, що супутник, період обертання якого 88 хв., на широті 50 градусів буде спостерігатися при кожному наступному обороті приблизно на 1400 км на захід, ніж на попередньому.

Однак такий розрахунок дає достатню точність прогнозів лише для кількох оборотів супутника. Якщо мова йде про значні проміжки часу, то треба брати до уваги відміну зоряної доби від 24 годин. Оскільки один оборот навколо Сонця відбувається Землею за 365 діб, то за одну добу Земля навколо Сонця описує кут приблизно в 1 градус (точніше, 0,99) в тому ж напрямку, в якому обертається навколо своєї осі. Тому за 24 години Земля обертається щодо нерухомих зірок не на 360 градусів, а на 361 і, отже, робить один оборот не за 24 години, а за 23 години 56 хвилин. Тому траса супутника за широтою зміщується на захід не на 15 градусів на годину, а на 15,041 градусів.

Супутникові орбіти вибираються виходячи з можливостей і призначення приладів, які розміщені на супутнику. Орбіти розрізняються по висоті над поверхнею Землі та по орієнтації площини обертання супутника відносно Землі. Двома найбільш поширеними типами орбіт є геостаціонарні орбіти та полярні орбіти.

Неважко підрахувати, що при радіусі r орбіти, що дорівнює приблизно 6,6 $R_{\text{с}}$, період обертання супутника виявиться рівним 24 годинам. Супутник з таким періодом обертання, запущений в площині екватора, буде нерухомо висіти над деякою точкою земної поверхні. Такі супутники використовуються в системах космічного радіозв'язку. Орбіту з радіусом $r = 6{,}6\, R_{\text{с}}$ (35 800 км) називають геостаціонарною.

Більшість дослідницьких і розвідувальних супутників в даний час літає по полярним орбітах. Це означає, що супутник летить на північ над однією стороною Землі, пролітає поблизу полюса, а потім летить на південь на другій половині орбіти. Полярні орбіти істотно нижче, ніж геостаціонарні. Багато з таких супутникових орбіт є також сонячно-синхронізованими так, що супутники пролітають над обраним об’єктом в один і той же час. Це забезпечує приблизно однакові умови освітленості поверхні Землі в один і той же час року впродовж декількох років. Половину орбіти, по якій супутник летить в північному напрямку, називають висхідною орбітою, а іншу половину – низхідною.

Перша космічна швидкість – найменша початкова швидкість, яку потрібно повідомити тілу біля поверхні Землі, щоб воно стало штучним супутником Землі. Будемо поступово збільшувати початкову швидкість супутника. Тоді його орбіта прийме форму

еліпса. Найближчу до Землі точку орбіти (точку, в якій супутник відділяється від останнього ступеня ракети-носія) називають перигеєм, а найвіддаленішу – апогеєм. Зі збільшенням швидкості запуску ексцентриситет орбіти зростає, та велика піввісь прямує до нескінченності. Еліптична орбіта вироджується в параболічну.

Швидкість руху по параболі відносно Землі прийнято називати другою космічною швидкістю. Це найменша швидкість, яку потрібно передати тілу, щоб його орбіта в полі тяжіння стала параболічною:

$$v = \sqrt{2gR_{\text{c}}} \approx 11{,}186\ {}^{\text{км}}/_{\text{с}}. \qquad (1.19)$$

Для того щоб покинути межі Сонячної системи, тіло повинно подолати ще й сили тяжіння до Сонця. Необхідна для цього швидкість запуску тіла з поверхні Землі – третя космічна швидкість v_3. При запуску в напрямку орбітального руху Землі v_3 мінімальна і становить 16,653 ${}^{\text{км}}/_{\text{с}}$. При запуску в напрямку, протилежному напрямку руху Землі, v_3 73 ${}^{\text{км}}/_{\text{с}}$. Можна обчислити початкову швидкість, яку необхідно надати тілу щодо Землі, щоб воно впало на Сонце. У цьому випадку швидкість тіла відносно Сонця буде дорівнювати нулю, а відносно Землі – 31,816 ${}^{\text{км}}/_{\text{с}}$. Цю швидкість іноді називають четвертою космічною швидкістю.

1.7. Прискорення сили тяжіння та потенціал сили тяжіння

Відомо, що векторні поля, вихори яких дорівнюють нулю, називаються безвихровими або потенціальними. Це важливий клас фізичних полів, яким притаманні певні властивості. Ці властивості розглянемо на прикладі потенціалу сили тяжіння.

Гравітаційне поле Землі є потенціальним, тобто таким, в якому кожній точці простору навколо Землі відповідає деяка неперервна, що має неперервні похідні, функція. Похідні цієї функції по напрямкам дорівнюють проекціям сили тяжіння на ці напрямки. Ця функція називається потенціалом.

За визначенням потенціал сили тяжіння W є сума потенціалу притягання V та потенціалу відцентрової сили U:

$$V = G\int\frac{dm}{r}, \quad U = \frac{\omega^2}{2}\rho^2,$$

і тоді:

$$W = G\int\frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2}\rho^2, \qquad (1.20)$$

Зміна потенціалу при переміщенні маси з однієї точки в будь-яку іншу дорівнює роботі, яка витрачається на цей перенос:

$$dW = Fds, \qquad (1.21)$$

де F – напруженість поля;

ds – переміщення маси.

Функція, представлена рівнянням (1.20), задовольняє визначенню потенціалу. Це легко довести. Розглянемо рис. 1.6. З нього видно, що

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\varsigma - z)^2, \qquad (1.22)$$

$$\rho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2, \qquad (1.23).$$

Тоді похідні по напрямкам x, y і z дорівнюють:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -G\int\frac{\partial r}{\partial x}\frac{dm}{r^2} + \omega^2\rho\frac{\partial\rho}{\partial x},$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = -G\int\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dm}{r^2} + \omega^2\rho\frac{\partial\rho}{\partial y}, \qquad (1.24)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -G\int\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dm}{r^2} + \omega^2\rho\frac{\partial\rho}{\partial z},$$

В рівняннях (1.24)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos(F,x), \quad \frac{\partial\rho}{\partial x} = \cos(P,x),$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \cos(F,y), \quad \frac{\partial\rho}{\partial y} = \cos(P,y), \qquad (1.25)$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \cos(F,z), \quad \frac{\partial\rho}{\partial z} = 0.$$

$\cos(F,z)$ - направляючі косинуси притягання F та відцентрової сили P.

Тоді рівняння (1.24) можна представити у вигляді:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = F\cos(F,x) + P\cos(P,x) = F_x + P_x,$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = F\cos(F,y) + P\cos(P,y) = F_y + P_y, \qquad (1.26)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = F\cos(P,z) = F_z,$$

F_x, F_y, F_z, P_x, P_y – проекції напруженості сили притягання та відцентрової сили відповідно.

Якщо маса переміщується з точки A в довільному напрямку в точку B, здійснюючи елементарне переміщення ds, то повний приріст потенціалу визначається за формулою:

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz, \qquad (1.27)$$

де

$$dx = ds\,\mathrm{COS}(s,x),$$
$$dy = ds\,\mathrm{COS}(s,y), \qquad (1.28)$$
$$dz = ds\,\mathrm{COS}(s,z).$$

Беручи до уваги (1.28) і (1.26), отримаємо

$$dW = Fds[\mathrm{COS}(F,x)\,\mathrm{COS}(s,x) + \mathrm{COS}(F,y)\,\mathrm{COS}(s,y) + \mathrm{COS}(F,z)\,\mathrm{COS}(s,z)].$$

Враховуючи, що $\mathrm{COS}(F,x)\,\mathrm{COS}(s,x) + \mathrm{COS}(F,y)\,\mathrm{COS}(s,y) + \mathrm{COS}(F,z)\,\mathrm{COS}(s,z) = \mathrm{COS}(F,s)$,

отримаємо

$$\frac{dW}{ds} = F\,\mathrm{COS}(F,s) = F_s. \qquad (1.29)$$

З цієї властивості потенціалу випливають два важливих наслідки, які пояснюють фізичну сутність введеного поняття. З рівняння (1.29) слідує, що приріст потенціалу є робота по переміщенню матеріальної точки в полі сил тяжіння. У випадку, коли точка переміщується в напрямку, що є ортогональним напрямку дії сили $\vec{F}$, $\mathrm{COS}(F,s) = 0$, $dW = 0$. Взявши інтеграл від останнього виразу, отримаємо:

$$W = const = C. \qquad (1.30)$$

Останнє рівняння є рівнянням деякої поверхні, в будь-якій точці якої, сила спрямована по нормалі до неї. Робота матеріальної точки при переміщенні по цій поверхні дорівнює нулеві ($dW = 0$). На матеріальну точку, розташовану на цій поверхні, не діють дотичні складові сили, оскільки сила нормальна до неї і, відповідно, точка знаходиться у рівновазі. Ця поверхня буде є поверхнею рівноваги рідини; саме за нею встановлюється рівень рідини. Така поверхня називається рівневою поверхнею, або еквіпотенціальною, внаслідок незмінності на ній потенціалу. Якщо в рівнянні (1.30) задавати різні значення сталих, то отримаємо сімейство рівневих поверхонь, для яких сусідні рівневі поверхні ніколи не торкаються одна одної та не перетинаються.

1.8. Еквіпотенціальні (рівневі) поверхні

Розглянемо випадок переміщення точки вздовж лінії дії сили $\vec{F}$. Тоді

$$\cos(\vec{F}, s) = 1, \quad ds = \frac{dW}{F}. \qquad (1.31)$$

В цьому рівнянні ds – переміщення, перпендикулярне рівневій поверхні; dW – приріст потенціалу при переході від однієї рівневої поверхні до іншої, що є нескінченно близькою.

Ці дві нескінченно близькі поверхні визначаються рівняннями:

$W = C, \ W_1 = C + dW.$

Згідно з рівнянням (1.31) відстань між двома нескінченно близькими рівневими поверхнями обернено пропорційна діючій силі. Простір, в якому діє сила $\vec{F}$, визначено як поле сил. Напрямки дії сил називаються силовими лініями, а величину сили $\vec{F}$ в кожній точці – напруженістю поля. Рівневі поверхні розташовуються тим густіше, чим більше напруженість поля.

Оскільки на кожній рівневій поверхні потенціал є величиною сталою, то його приріст при переході матеріальної точки з однієї рівневої поверхні на іншу є постійна величина, що не залежить від положення точки на цій поверхні. Звідси слідує, що приріст потенціалу не залежить від шляху переміщення матеріальної точки, а є лише функцією положення кінцевих точок переміщення.

Одна з важливих властивостей отримала назву теореми Лапласа. Згідно цієї теореми для точки, що знаходиться зовні мас, які притягають, сума других похідних потенціалу притягання по осям декартових координат дорівнює нулеві:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \qquad (1.32)$$

Теорему Лапласа просто доводиться прямим диференціюванням потенціалу притягання. Рівняння для потенціалу точкової маси $V = \frac{Gm}{r}$ при диференціюванні по координатам x, y, z приводить до наступних виразів:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -G\frac{m}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x},$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = -G\frac{m}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y}, \qquad (1.33)$$
$$\frac{\partial V}{\partial z} = -G\frac{m}{r^2}\frac{\partial r}{\partial z}.$$

Значення похідних $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial y}$ знайдемо з використанням рівняння (1.22):

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\xi - x}{r},$$
$$\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\eta - y}{r}, \qquad (1.34)$$
$$\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\varsigma - z}{r}.$$

Використовуючи рівняння (1.33) та (1.34) отримаємо рівняння перших похідних потенціалу притягання

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Gm\frac{\xi - x}{r^3},$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = Gm\frac{\eta - y}{r^3}, \qquad (1.35)$$
$$\frac{\partial V}{\partial z} = Gm\frac{\varsigma - z}{r^3}.$$

Відповідним диференціюванням знайдемо другі похідні:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = Gm\left[-3\frac{\xi - x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{1}{r^3}\right] = Gm\left[3\frac{(\xi - x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right],$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = Gm\left[-3\frac{\eta - y}{r^4}\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{1}{r^3}\right] = Gm\left[3\frac{(\eta - y)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right], \qquad (1.36)$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = Gm\left[-3\frac{\varsigma - z}{r^4}\frac{\partial r}{\partial z} - \frac{1}{r^3}\right] = Gm\left[3\frac{(\varsigma - z)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right].$$

Склавши відповідно праві та ліві частини рівнянь (1.36), отримаємо:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = Gm\left\{\frac{3}{r^5}\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\varsigma - z)^2\right] - \frac{3}{r^3}\right\} = 0 \qquad (1.37)$$

У випадку, коли точка, що притягається знаходиться всередині мас, які притягаються, рівняння Лапласа для потенціалу притягання перетворюється в рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi G\sigma, \qquad (1.38)$$

де σ – густина речовини.

Коли ми розглядаємо не потенціал притягання, а потенціал сили тяжіння

$$W = \frac{Gm}{r} + \frac{\omega^2}{2}\rho^2,$$

то тоді, рівняння Лапласа (1.32) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 2\omega^2, \qquad (1.39)$$

а рівняння Пуассона (1.38)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi G\sigma + 2\omega^2. \qquad (1.40)$$

Рівняння (1.39) та (1.40) легко отримати, якщо замість потенціалу притягання двічі продиференціювати по Декартовим координатам потенціал сили тяжіння.

Тоді похідні потенціалу відцентрової сили

$U = \frac{\omega^2}{2}\rho^2 = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + +y^2)$ представляються

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \omega^2 x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \omega^2 x, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \omega^2, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \omega^2, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0.$$

Основні властивості потенціалу притягання

1. потенціал V і його перші похідні – однозначні, неперервні і кінцеві функції координат точки, що притягується, в усьому просторі зовні гравітуючих мас;
2. потенціал V – функція регулярна, тобто на нескінченності вона прямує до нуля

$$\lim_{r\to\infty} V = 0;$$

3. при віддаленні від мас, що притягують M, добуток ρV прямує до значення

$$\lim_{r\to\infty} rV = GM$$

4. в кожній точці за межами мас, які притягаються, потенціал задовольняє рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad (1.41)$$

5. В кожній точці всередині мас, які притягуються, справедливе рівняння Пуассона

$$\Delta V = -4\pi G\delta, \qquad (1.42)$$

де δ – щільність мас, які оточують точку.

Формула (1.41) є частковим випадком рівняння (1.42) при δ=0.

$$W(x,y,z)=V(x,y,z)+U(x,y) \qquad (1.43)$$

Часткові похідні від функції W по координатам x, y, z дорівнюють складовим сили тяжіння g_x, g_y, g_z:

$$\frac{\partial W}{\partial x}=g_x;\frac{\partial W}{\partial y}=g_y;\frac{\partial W}{\partial z}=g_z; \qquad (1.44)$$

Таким чином, за скалярну функцію поля приймається функція *W*, яка називається *потенціалом сили тяжіння*. В фізичному розумінні це енергія, яку потрібно витратити, щоб перемістити в полі сили тяжіння тіло одиничної маси із точки спостереження у нескінченність. Потенціал має максимальне значення в центрі Землі і неперервно спадає по мірі віддалення від нього.

Нехтуючи потенціалом відцентрової сили, можна стверджувати, що потенціал сили тяжіння для точки, яка розташована на земній поверхні, має вигляд:

$$W_1=G\frac{M}{r}. \qquad (1.44)$$

Якщо прийняти до уваги, що в будь-якій іншій точці, що розташована на продовженні земного радіусу *r*, потенціал дорівнює:

$$W_2=G\frac{M}{r+\Delta r}, \qquad (1.45)$$

то виконується рівність:

$$\Delta W=W_2-W_1=fM\left(\frac{-\Delta r}{r(r+\Delta r)}\right). \qquad (1.46)$$

Якщо $\Delta r\to 0$, то

$$\lim_{\Delta r\to 0}\Delta W=-f\frac{M\Delta r}{r^2}=-g\Delta r. \qquad (1.47).$$

З рівняння (1.47) можна отримати, що $g=-\frac{dW}{dr}$, тобто прискорення сили тяжіння є перша похідна потенціалу сили тяжіння в напрямку до центра Землі. В фізичному розумінні потенціал - є робота, що витрачається при русі точкової маси, що притягається на відрізку $\Delta r:|dW|=g\Delta r$. При переміщенні точки в напрямку, що ортогональний до діючої сили маємо:

$$(g,\Delta r)=90^\circ,\cos(g,\Delta r)=0 \quad i \quad dW=0, \quad W=const. \qquad (1.48)$$

Це рівняння деякої поверхні, у будь-якій точці якої сила тяжіння спрямована по нормалі до неї. Надаючи функції W різні значення, одержимо родину еквіпотенціальних поверхонь, тобто поверхонь рівного потенціалу, що у гравіметрії називають еквіпотенціальними поверхнями. Однією з них є поверхня, що збігається з рівнем води у Світовому океані в спокійному стані, яка названа *геоїдом*. Вона характеризує фігуру Землі.

1.9. Геоїд

Рівняння (1.30) представляє множину рівневих поверхонь, кожну з яких окремо можна отримати, надаючи певні значення сталій C. Таким чином можна побудувати рівневу поверхню, що співпадає з поверхнею деякої ідеальної Землі.

Скористаємося формулою для потенціалу (1.20)

$$W = G\int\frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2}\rho^2.$$

Прирівнюючи потенціал C, отримаємо сімейство рівневих поверхонь

$$G\int\frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2}\rho^2 = C.$$

Скористаємося сферичною системою координат. Тоді

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi,$$

де r – геоцентрична відстань

$$G\int\frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2}r^2\cos^2\varphi = C. \qquad (1.49)$$

Виберемо C таким чином, щоб останнє рівняння відповідало б Землі. Для цього досить отримати співпадання поверхні (1.49) хоча б в одній точці з поверхнею Землі. В якості такої точки візьмемо довільну точку екватору на рівні океану. Тоді

$$\varphi = 0, \;\; r = a,$$

звідки

$$C = G\left[\int\frac{dm}{r}\right]_{r=a} + \frac{\omega^2}{2}a^2.$$

Підставляючи це значення C в рівняння (1.20), отримаємо

$$G\int\frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2}\rho^2 = G\left[\int\frac{dm}{r}\right]_{r=a} + \frac{\omega^2}{2}a^2, \qquad (1.50)$$

рівняння рівневої поверхні, яка досить близька до поверхні Землі на рівні океану. Ця поверхня називається геоїдом. Підінтегральна функція лівої частини рівняння (1.50) розгортається в нескінченний ряд та інтегрується почленно. Якщо в отриманому ряді утримати лише члени порядку квадрата стиснення (перші три члени), то отримаємо рівняння сфероїда (поверхня, яка дуже близька до еліпсоїду).

Значення сили тяжіння на поверхні такого геоїду знаходять, виконуючи диференціювання потенціалу (1.20) по напрямку нормалі. Оскільки нормаль не входить в зазначене рівняння потенціалу, диференціювання проводиться по радіусу. При цьому допускається помилка порядку квадрату стиснення. Радіус-вектор земного еліпсоїду не відхиляється від нормалі більше, ніж на $11'$, що приблизно відповідає помилці в 10^{-5}. Поняття геоїда вперше було введено в 1873 році німецьким геодезистом Лістингом, як рівневої поверхні, яка представляє фігуру Землі. Саме слово «геоїд» в перекладі з грецької означає Земле подібний, який близькій за формою до Землі.

Геоїд – це рівнева поверхня, що співпадає на океанах з незбуреним рівнем води і продовжена під континенти таким чином, що сила тяжіння в будь-якій точці цієї поверхні направлена по нормалі до неї. В силу цієї властивості геоїд є поверхнею рівноваги. Геоїд проходить поблизу від загального земного еліпсоїду, іноді піднімаючись над ним, іноді занурюючись під нього, проте всюди залишається випуклим.

Геоїд – це наступний крок наближення до істинної фігури Землі після земного еліпсоїду, хоча першим наближенням в представленнях про фігуру Землі було представлення її у виді кулі. Коли було Ньютоном встановлено та доведено стиснення Землі, то Землю почали представляти в вигляді еліпсоїду зі стисненням $\alpha = \frac{a-b}{a}$, де a – велика, b – мала напіввісі земного еліпсоїду. Перехід від кулі до еліпсоїду став істотним наближенням апроксимуючої поверхні до істинної поверхні Землі. Це відповідало наближенню до правильної поверхні Землі на 20 км (різниця між полярною та екваторіальною напіввісями). Тепер, коли Земля представляється еліпсоїдом, при правильній орієнтації його в надрах Землі, найбільші відхилення його від істинної фігури Землі визначаються

рельєфом – відхиленням фізичної поверхні Землі від еліпсоїду. Врахування цих відхилень істинної фігури Землі від ідеальної – еліпсоїду, прийнято вважати наступним наближенням в представленнях про фігуру Землі.

Введення поняття геоїду не наближає до істинної фігури Землі, а іноді і віддаляє. В тих місцях, де висоти геоїду від'ємні, геоїд віддалений від фізичної поверхні Землі далі, ніж еліпсоїд. На океанах геоїд дуже наближений до фізичної поверхні Землі – рівню моря. Лінійна міра відхилень геоїда від еліпсоїда складає десятки метрів та не перебільшує 200 м. Як основний недолік геоїду слід виділити неправильність його форми. Тому на відміну від еліпсоїду для нього неможливо записати прості геометричні співвідношення, і це унеможливлює його використання при вирішенні прикладних геодезичних задач. Проте геоїд є поверхнею від якої проводиться відлік висот. Висоти визначають відносно рівня моря. При цьому вважають, що рівень всіх морів однаковий та співпадає з поверхнею геоїда. Це невірно. Рівні морів неоднакові, та початок відліку висот проводиться відносно деякої умовної точки (реперу), яка звичайно співпадає з середнім за багато років рівнем океану.

Геоїд є дуже зручною поверхнею відносності для всіх виміряних значень сили тяжіння. В дійсності, виміряні на різних висотах значення сили тяжіння важко порівнювати між собою. Виконуючи редукцію їх на поверхню геоїда, ми приводимо їх до одного рівня та отримуємо можливість співставляти їх одне з одним.

1.10. Нормальне гравітаційне поле Землі

Реальне гравітаційне поле Землі математично є дуже складним. Це насамперед пов'язано з тим, що Земля має складну форму зовнішньої поверхні, а також складну внутрішню будову. Густина порід змінюється від поверхні Землі до її центра та в горизонтальному напрямі. Тому реальне гравітаційне поле Землі ділять на дві частини, нормальне і аномальне. Нормальне гравітаційне поле представляють простою моделлю, яка близька до реальної Землі. Аномальні гравітаційні поля пов'язані неоднорідністю внутрішньої будови Землі, сучасними геодинамічними процесами, що відбуваються у надрах Землі,

різкими змінами густин як у вертикальному, так і латеральному напрямках, тощо. Модель гравітаційного поля прийнято називати нормальним гравітаційним полем. За фігуру такої «теоретичної» Землі приймають еліпсоїд обертання, поверхня якого є рівневою. Цей еліпсоїд називають рівневим еліпсоїдом. При підборі рівневого еліпсоїда необхідно, щоб задовольнялися такі умови:

1. Центр рівневого еліпсоїда збігається з центром мас Землі, а його головна вісь енерції збігається з віссю обертання Землі.
2. Рівневий еліпсоїд обертається з такою самою кутовою швидкістю ω, що й реальна Земля.
3. Маса рівневого еліпсоїда дорівнює масі реальної Землі.
4. Зональні гармонічні коефіцієнти другого порядку для рівневого еліпсоїда і реальної Землі повинні збігатися:

$$I_2^e = I_2^3.$$

5. Нормальний потенціал U_0 сили тяжіння на поверхні рівневого еліпсоїда повинен дорівнювати реальному потенціалу W_0 сили тяжіння на рівневій поверхні, яка проходить через початок відліку висот.

Отже, сталі ω, I_2, GM та U_0 є основними, які визначають Нормальну Землю. Їх називають фундаментальними геодезичними сталими, які характеризують Нормальну Землю. До них належать такі величини: велика піввісь рівневого еліпсоїда a (замість нормального потенціалу U_0), геоцентрична гравітаційна стала GM зональний коефіцієнт I_2, кутова швидкість обертання Землі ω.

На XVII Генеральній Асамблеї Міжнародного геодезичного і геофізичного союзу в Канберрі (грудень 1979 р) була прийнята геодезична референційна система 1980 р (GRS 1980), яка визначає основні параметри глобального, найкращим чином апроксимуючого Землю еліпсоїда. В GRS 1980 були вибрані такі чотири незалежні константи:

$$a=6378137 \text{ м},$$
$$GM = 3986005 \cdot 10^8 \text{м}^3 c^{-2},$$
$$\mathrm{I}_2 = 108263 \cdot 10^{-8} \ ,$$
$$\omega = 7292115 \cdot 10^{-11} \text{с}^{-1}.$$

Відзначимо, що задається геоцентрична гравітаційна стала GM, яка включає атмосферу Землі. Гравітаційна стала G відома з точністю до чотирьох значущих цифр, а значення GM – з точністю

до семи значущих цифр.

Для еквіпотенціального (рівневого) еліпсоїда можуть бути знайдені всі інші сталі: стиснення α, ексцентриситет e, екваторіальна сила тяжіння γ_e і нормальний потенціал рівневого еліпсоїда U_0:

α =0,003352810681=1/298,2572221,

e^2=0,006694380023,

$\gamma_e = 9{,}7803267715$ м $\cdot$ с$^{-2}$,

$U_0 = 6263686{,}0850 \cdot 10^2$м^{2}с^2.

Наведемо також допоміжні безрозмірні величини та їхні значення:

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} = 0{,}003449786,$$

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} = 0{,}005302440.$$

Нормальну силу тяжіння γ визначимо як похідну від нормального потенціалу U за напрямком зовнішньої нормалі n до рівневої поверхні

$$\gamma = -\frac{\partial U}{\partial n}. \qquad (1.51)$$

Враховуючи, що кут між нормаллю n до $U = const$ і радіус-вектором ρ не перевищує $11^{/}$, можна вважати, що

$\gamma = -\partial U / \partial \rho$.

Визначимо тепер значення нормальної сили тяжіння γ_0 на поверхні рівневого еліпсоїду $U = U_0$. Для знаходження сталої U_0 використаємо наближене значення потенціалу сили тяжіння, яке одержують із розкладання його в ряд за сферичними функціями:

$$U_0 = \frac{GM}{\rho} + \frac{G(A_m - C)}{\rho^3}\left(\frac{3}{2}cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) + \frac{GMq}{2a^3} \cdot \rho^2 sin^2\theta. \qquad (1.52)$$

Після диференціювання по радіус-вектору одержимо:

$$\gamma = -\frac{\partial U_0}{\partial \rho} = \frac{GM}{\rho^2} + \frac{3G(A_m - C)}{\rho^4}\left(\frac{3}{2}cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) + \frac{GMq}{a^3} \cdot \rho sin^2\theta. \qquad (1.53)$$

При $\rho = a$ з точністю до малих величин першого порядку

$$\gamma_0 = \frac{GM}{a^2}\left[1 + \alpha - \frac{3}{2}q + \left(\frac{5}{2}q - \alpha\right)cos^2\theta\right]. \qquad (1.54)$$

Після розкладання потенціалу в ряд та утримання членів порядку квадрату стиснення, отримали залежність між силою тяжіння та широтою місцерозташування. Ця залежність відноситься до фігури Землі у виді сфероїду, або з тим же степенем точності, еліпсоїду.

Якщо $\theta = 0$ полярна постійна γ_p визначається

$$\gamma_p = \frac{GM}{a^2}(1+q), \tag{1.55}$$

а при $\theta = \frac{\pi}{2}$ – екваторіальна постійна

$$\gamma_e = \frac{GM}{a^2}\left(1+\alpha-\frac{3q}{2}\right) \tag{1.56}$$

Після нескладних перетворень одержимо

$$\beta = \frac{\gamma_p-\gamma_e}{\gamma_e} = \frac{5}{2}q-\alpha, \tag{1.57}$$

$$\gamma_0 = \gamma_e(1+\beta^2 sin^2 B - \beta_1 sin^2 2B), \tag{1.58}$$

$$q = \frac{\omega^2 a}{\gamma_e}, \quad \beta_1 = \frac{\alpha^2}{8}+\frac{1}{4}\alpha\beta, \quad \theta = 90^0 - B.$$

Ці формули були одержані у XVIII столітті французьким математиком Клеро. В своїй роботі вчений, спираючись на закон Всесвітнього тяжіння, вивів основні співвідношення, що пов'язують форму Землі з розподілом сили тяжіння на ній. В доведенні Клеро було зроблено передбачення, що Земля є тілом обертання, яке мало відрізняється від сфери не тільки за формою, але й за розподілом мас, тобто моменти інерції відносно будь-якої осі, що лежить в площині екватора, рівні.

На початку XX століття (1928 р.) Мінео одержав формулу нормальної сили тяжіння для тривісного еліпсоїда

$$\gamma = \frac{(a\gamma_a cos^2\lambda + b\gamma_b sin^2\lambda)sin^2\varphi + c\gamma_c sin^2\varphi}{\sqrt{(a^2cos^2\lambda + b^2sin^2\lambda\ \ )cos^2\varphi + c^2sin^2\varphi}}, \tag{1.59}$$

а в 1929р – італійські вчені-геодезисти Сомільяна та Піцетті одержали замкнуту формулу для нормальної сили тяжіння γ на двовісному еліпсоїді

$$\gamma = \frac{a\gamma_e cos^2 B + b\gamma_p sin^2 B}{\sqrt{a^2cos^2B + b^2sin^2B}}. \tag{1.60}$$

У цих формулах a, b, c – параметри тривісного еліпсоїда, $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$ – нормальна сила тяжіння за напрямом головних осей і відповідно a, b – параметри рівневого еліпсоїда обертання, B – геодезична широта пункту. Розкладаючи в цій формулі знаменник в ряд, та відкидаючи члени вищих порядків, легко прийти до результатів та формул, отриманих Клеро. Формула (1.58) називається формулою розподілу нормальної сили тяжіння. Коефіцієнти формули γ_e, β, β_1 визначають за експериментальними даними про гравітаційне поле Землі. Найбільш широке застосування

мали формули Гельмерта (1901 – 1909 р.р.) і формула Кассініса. Гельмерт використав дані для 1603 гравіметричних пунктів, розташованих на материках у північній півкулі

$$\gamma_0^{1909} = 9{,}78030(1 + 0{,}005302sin^2B - 0{,}0000070sin^2 2B)\text{м}\cdot\text{с}^{-2} \quad (1.61)$$

Формула Кассініса (1885 – 1964 р.р.)

$$\gamma_0^{1930} = 9{,}78049(1 + 0{,}0052884sin^2B - 0{,}0000059sin^2 2B)\text{м}\cdot\text{с}^{-2} \quad (1.62)$$

відповідає параметрам еліпсоїда Хейфорда, яка була прийнята в 1930 р. (Стокгольм) Міжнародною угодою, і через те її назвали Міжнародною. Сила тяжіння у формулах Гельмерта і Кассініса виражена в Потсдамській системі, що вимагає для γ_0 ввести поправку -14 мГал. Для переходу від формули Кассініса до формули Гельмерта існує залежність

$$\gamma_0^{1909} = \gamma_0^{1930} - (19{,}0 - 13 \cdot 2sin^2B + 1{,}076sin^2 2B)\ \text{мГал} \quad (1.63)$$

Формула нормальної сили тяжіння для геодезичної референційної системи 1980 року має вигляд

$$\gamma_0 = 9{,}7803266(1 + 0{,}0053024sin^2B - 0{,}00000585\ sin^2 2B)\ \text{мс}^{-2}$$

1.11. Другі похідні потенціалу сили тяжіння. Одиниці вимірювання других похідних

Для геологічної інтерпретації гравіметричних даних крім значень Δg_a використовують другі, а іноді і треті похідні гравітаційного потенціалу.

Існує шість других похідних гравітаційного потенціалу по осям x, y, z, що позначаються $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}$, а в більш прийнятому виді $W_{xx}, W_{yy}, W_{zz}, W_{xy}, W_{xz}, W_{yz}$. Безпосередньо вимірюють W_{xy}, W_{xz}, W_{yz} і різницеве значення $W_\Delta = W_{yy} - W_{xx}$. Інші похідні другого і третього порядків можуть бути обчислені за значеннями відомих величин Δg і других похідних гравітаційного потенціалу.

Другі похідні гравітаційного потенціалу вимірюють за допомогою спеціальних приладів – гравітаційних варіометрів і градієнтометрів. Гравітаційні варіометри визначають чотири

параметри , а саме – W_{xy}, W_{xz}, W_{yz} і $W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}$, градієнтометри – , W_{xz}, W_{yz}.

Одиницею вимірювання других похідних є величина $1 \cdot 10^{-9}$ $с^{-2}$, що називається етвешем (Е) на честь угорського фізика і математика Лоранда Етвьоша – засновника варіометричного методу.

Виміряні значення других похідних гравітаційного потенціалу є їх абсолютними значеннями в точці спостереження, яка приймається за початок координат. Розташування координатних осей приймається таким чином: вісь z – вертикально та вона співпадає з внутрішньою нормаллю до еквіпотенціальної поверхні, що проходить через точку спостереження, осі x і y – в площині, що є дотичною до цієї еквіпотенціальної поверхні. Вісь x спрямована на південь. Тоді,

$$W_z = \frac{\partial W}{\partial z} = g,\ W_{xz} = \frac{\partial g}{\partial x} = g_x, W_{yz} = \frac{\partial g}{\partial y} = g_y, W_{zz} = \frac{\partial g}{\partial z} = g_z \quad (1.64)$$

Кожна з других похідних характеризує швидкість зміни першої похідної потенціалу, тобто зміну напруженості, яка припадає на одиничну відстань в даному напрямку. Отже, другі похідні W_{xz}, W_{yz}, W_{zz} є градієнтами сили тяжіння по відповідним координатним осям. Похідні W_{xz} і W_{yz} називають горизонтальними градієнтами сили тяжіння (рис1.4), W_{zz} – вертикальним градієнтом. Геометрична сума векторів W_{xz} і W_{yz} визначається вектором $\vec{G} = \frac{\partial g}{\partial s}$ і називається повним горизонтальним градієнтом сили тяжіння Напрямок і величина цього вектору визначається з рівнянь:

$$\tan\alpha = \frac{W_{yz}}{W_{xz}} \quad (1.65)$$

$$G = \sqrt{W_{xz}^2 + W_{yz}^2} \quad (1.66)$$

Вектор $\vec{G}$ вказує напрямок найбільшої зміни сили тяжіння. Якщо спроектувати вектор $\overrightarrow{G}$ на будь-який напрямок з азимутом А, то отримаємо складову сили тяжіння (рис .1.5):

$$\frac{\partial g}{\partial l} = \frac{\partial g}{\partial s}\cos(A - \alpha) == \frac{\partial g}{\partial s}\cos A\cos\alpha + \frac{\partial g}{\partial s}\sin A\sin\alpha = \frac{\partial g}{\partial x}\cos A + \frac{\partial g}{\partial x}\sin A$$

$$\frac{\partial g}{\partial l} = \frac{\partial g}{\partial s}\cos(A-\alpha) == \frac{\partial g}{\partial s}\cos A \frac{\partial g}{\partial s}\sin A \sin\alpha = \frac{\partial g}{\partial x}\cos A + \frac{\partial g}{\partial x}\sin A \qquad (1.67)$$

Інші значення похідних W_{xz} і W_{yz} можна отримати, якщо представити їх наступним чином:

$$W_{xz} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} g_x,$$

$$W_{yz} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} g_y. \qquad (1.68)$$

Тобто ці похідні можна розглядати ще і як похідні по вертикалі складових сили тяжіння g_x і g_y.

1.12. Кривизни та їхня роль в гравіметрії

Для того, щоб зрозуміти фізичний зміст других похідних потенціалу по x і y вводиться поняття кривизни поверхні.

Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$, то її кривизна визначається за формулою:

$$\frac{1}{\rho_\varphi} = rcos^2\varphi + 2s\sin\varphi\cos\varphi + qsin^2\varphi, \qquad (1.69)$$

де ρ_φ – радіус кривизни в азимуті перерізу φ, в якому визначається кривизна;

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}; \qquad q = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \qquad (1.70)$$

Поверхня, на якій розглядається потенціал і його похідні, задана рівнянням $W = C$. Це є рівнева поверхня потенціалу W.

Якщо знайти значення $r, s\ q$ для W та підставити їх у рівняння (1.69), то кривизну поверхні виразимо через другі похідні потенціалу.

Нехай поверхня задана рівнянням $W(x, y, z) = C$.

Вважаючи $z = f(x, y)$ та отримуючи повні похідні від W по x і y та їхні другі похідні, отримаємо:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Звідки отримаємо:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{g}W_{xx};$$

$q = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{g} W_{yy}$;

s $= \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -\frac{1}{g} W_{xy}$.

Підставляючи значення r, q, s в рівняння (1.69), визначимо кривизну поверхні

$$\frac{1}{\rho_\varphi} = -\frac{1}{g}\left(W_{xx} cos^2\varphi + W_{xy} \sin 2\varphi + W_{yy} sin^2\varphi\right). \quad (1.71)$$

Розглянемо перерізи в меридіані та першому вертикалі:

В першому випадку $\varphi = 0$,

$$\frac{1}{\rho_{\text{M}}} = -\frac{1}{g} W_{xx}; \quad (1.72)$$

а в другому – $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{1}{\rho_N} = -\frac{1}{g} W_{yy}. \quad (1.73)$$

Віднявши почленно праві та ліві частини рівнянь (1.72) і (1.73), отримаємо:

$$W_{yy} - W_{xx} = W_\Delta = g\left(\frac{1}{\rho_{\text{M}}} - \frac{1}{\rho_N}\right), \quad (1.74)$$

де ρ_{M} і ρ_N – радіуси кривизни в перерізах меридіану та першого вертикалу.

Ці перерізи називаються головними нормальними перерізами поверхні. Таким чином, різниця других похідних потенціалу W_Δ визначає різницю кривизни двох головних нормальних перерізів, а саме, відхилення поверхні від сферичності, а змішана похідна W_{xy} – напрямок головних нормальних перерізів відносно довільно обраної системи осей xy.

Використовуючи формулу (1.71), знайдемо два взаємно перпендикулярних перерізи, що проходять під кутами φ_0 і $\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$ до осі x. Різниця цих двох перерізів буде

$$\frac{1}{\rho_{\varphi_0}} - \frac{1}{\rho_{\varphi_0 + \frac{\pi}{2}}} = -\frac{1}{g}\left(W_\Delta \cos 2\varphi - 2W_{xy} \sin 2\varphi\right). \quad (1.75)$$

Головні нормальні перерізи, для яких кривизна $\frac{1}{\rho_\varphi}$ є максимальною або мінімальною величиною, можна знайти з розв'язку наступного рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{\rho_\varphi} = -\frac{1}{g}\left(W_\Delta 2 \sin 2\varphi - 4W_{xy} \cos 2\varphi\right) = 0. \quad (1.76)$$

Звідки отримаємо

$$\tan 2\varphi_0 = 2\frac{W_{xy}}{W_\Delta} \quad (1.77)$$

У випадку, коли екстремум функції W_Δ дорівнює нулю в точці спостереження, то виконується рівність:

$$\frac{1}{\rho_{min}} - \frac{1}{\rho_{max}} = 0. \quad (1.78)$$

Тобто еквіпотенціальна поверхня, яка проходить через точку спостереження, має сферичну форму.

При великих значеннях W_Δ ($\varphi_0 \approx 0$) різниця кривизн стає суттєвою, що може бути обумовлено лише відповідним розподілом мас різної густини під точкою спостереження.

З рівняння (1.68) можна отримати наступні співвідношення:

$$R\cos 2\varphi_0 = W_\Delta,\ \ R\sin 2\varphi_0 = -2\,W_{xy},\ \ R = \sqrt{W_{xy}^2 + W_\Delta^2} \quad (1.79)$$

Розглянуті співвідношення між похідними гравітаційного потенціалу не є одиничними, існують і інші співвідношення. Важливим є той факт, що будь-який елемент гравітаційного поля g або будь-яка похідна гравітаційного потенціалу може бути обчислена, якщо відомий розподіл якого-небудь іншого елемента поля на нескінченній площині.

1.13. Нормальні значення других похідних потенціалу сили тяжіння

Другі похідні нормального потенціалу сили тяжіння визначають градієнти нормальної сили тяжіння та кривизну рівневих поверхонь та силових ліній нормального поля. Градієнти кривизн U_Δ і U_{xy} на поверхні Нормальної Землі можна визначити, якщо використати головні радіуси кривизни еліпсоїда M і N:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 sin^2 B)^{3/2}},$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 sin^2 B}}.$$

Тоді

$$U_\Delta = \gamma\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N}\right)$$

а U_{xy}=0 через те, що нормальна сила тяжіння від довготи не залежить. Утримуючи члени порядку e^2, одержимо

$$U_\Delta = \frac{\gamma - e^2(1+cos2B)}{2N}. \quad (1.80)$$

Вертикальний градієнт U_{zz} нормальної сили тяжіння визначають через кривизни головних нормальних перерізів

$$U_{zz} = \gamma\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right) + 2\omega^2. \quad (1.81)$$

З точністю до членів порядку e^2

$$U_{zz} = \frac{\gamma}{a}(2 + e^2 - 2e^2 sin^2 B) + 2\omega^2.$$

Вертикальний градієнт нормальної сили тяжіння дуже мало залежить від широти. Якщо представити Землю однорідною кулею і нехтувати її добовим обертанням, то

$$U_{zz} = \frac{\partial\gamma}{\partial z} = \frac{2GM}{R^3} = \frac{2\gamma}{R}. \quad (1.82)$$

На поверхні Землі при $R = 6371$ км

$$U_{zz} = 0.3086 \text{ мГал/м} \quad (1.83)$$

Горизонтальний градієнт нормальної сили тяжіння в меридіональному напрямі

$$U_x = \frac{\partial\gamma}{\partial z} = \frac{1}{R}\frac{\partial\gamma}{\partial B}, \quad (1.84)$$

де $dx = RdB$ – елемент дуги меридіана. Тоді похідна

$$U_{xz} = \frac{\gamma_e\beta}{R} sin\, 2B \quad (1.85)$$

на підставі виразу $\frac{\partial\gamma}{\partial B} = \gamma_e\beta\, sin\, 2B$

Горизонтальний градієнт $U_{yz} = 0$ через те, що нормальна сила тяжіння не залежить від довготи. Підставляючи в вирази (1.44, 1.46, 1.49) чисельні значення сталих, одержимо

$$U_\Delta = 5{,}12(1 + \cos 2B),$$
$$U_{xz} = -8{,}11 \sin 2B,$$
$$U_{zz} = 0.3086(1 - 0{,}00142 sin^2 B), \quad (1.86)$$
$$U_{xy} = 0,$$
$$U_{yz} = 0.$$

де коефіцієнти виражені в етвешах.

1.14. Аномалії сили тяжіння

Аномалією сили тяжіння називається різниця між виміряним (спостереженим) значенням сили тяжіння $g_{\text{сп}}$, яке віднесене до деякої поверхні порівняння, та його нормальним або теоретичним, що обчислюються за відомими формулами нормального значення сили тяжіння, тобто:

$$\Delta g = g_{\text{сп}} - \gamma_0. \qquad (1.87)$$

Виміряне значення сили тяжіння отримують за результатами абсолютних або відносних спостережень при проведенні різноманітних гравітаційних зйомок. Якщо виміряне та нормальне значення сили тяжіння віднесені до однієї точки, то таку обчислену аномалію сили тяжіння називають "чистою". У випадку, коли ці значення сили тяжіння відносять до різних точок простору, то тоді отримують ''змішану" аномалію сили тяжіння.

При обчисленнях аномалій сили тяжіння вводять різні поправки (редукції) у виміряне або нормальне значення сили тяжіння. В залежності від того, які поправки (редукції) вводять, розрізняють різні види аномалій. Поле аномалій сили тяжіння подають у вигляді гравіметричних карт. Гравіметричні карти представляють в аномаліях у вільному повітрі, в повній і неповній топографічних редукціях, Фая, Буге, Гленна та інших. Згідно з Держстандартами гравіметричні спостереження виконують на суші, на поверхні та дні моря, у свердловинах і шахтах, а також у повітрі та космічному просторі. Очевидно, для таких пунктів спостереження необхідно обчислити аномалії сили тяжіння, але перш за все потрібно їх знати на фізичній поверхні Землі.

Розглянемо основні аномалії, які використовуються при інтерпретації даних гравіметричних вимірювань для вивчення локальних геологічних об'єктів.

1. Аномалія у вільному повітрі. При цьому відбувається приведення нормального значення до точки спостереження та утворюється різниця між спостереженим і приведеним нормальним значеннями:

для наземних спостережень:

$$\Delta g_{\text{в.п.}} = g_{\text{сп.}} - \gamma_0 + \frac{2\gamma}{R} H = g_{\text{сп.}} - \gamma_0 + 0{,}3086H; \qquad (1.88)$$

для спостережень на рівні моря ($H = 0$)

$$\Delta g_{\text{в.п.}} = g_{\text{сп.}} - \gamma_0.$$

При геофізичній інтерпретації гравіметричних вимірювань

певний інтерес викликає притягання локальних геологічних об'єктів. Через те із спостережених значень сили тяжіння знімають вплив притягання видимих топографічних мас, розміщених між рівнем моря та фізичною поверхнею Землі. Якщо вплив топографічних мас прийняти рівним притяганню плоскої пластини нескінченного простягання та виправити цією ж поправкою спостережене значення сили тяжіння, то тоді обчислену аномалію називають аномалією Буге. Ці топографічні маси, які подані у вигляді плоскої пластини, називають проміжним шаром. Тоді аномалію Буге представляють у виді:

$$\Delta g_{\text{Б}} = \Delta g_{\text{в.п.}} - 2\pi G\delta H^{\gamma}$$

або

$$\Delta g_{\text{Б}} = g - \gamma_0 + \delta g_p + 0{,}3086H^{\gamma} - 2\pi G\delta H^{\gamma}, \qquad (1.89)$$

де: δg_p – поправка за рельєф,

δ – густина проміжного шару.

За формулою (8.53) обчислюють аномалії Буге для пунктів, які розташовані на суші. Сума поправок

$$\delta g_{\text{Б}} = -2\pi G\delta H^{\gamma} + 0{,}3086H^{\gamma}$$

називається поправкою (редукцією) Буге. Якщо спостереження виконані в морських умовах, тоді для обчислення аномалії Буге у виміряне значення сили тяжіння вводять поправку, яка враховує дефект мас, що притягують, внаслідок того, що густина земної кори відрізняється від густини морської води. Ця поправка додається, і її обчислюють за формулою:

$$2\pi G(\delta - \delta_{\text{в}})h, \qquad (1.90)$$

де: δ – густина земної кори,

$\delta_{\text{в}}$ – густина морської води,

h – глибина моря.

Аномалію Буге на морі одержують, якщо до аномалії у вільному повітрі додати цю поправку

$$\Delta g_{\text{Б}} = \Delta g_{\text{в.п.}} + 2\pi G(\delta - \delta_{\text{в}})h. \qquad (1.91)$$

При обчисленні аномалій Буге для пункту, розміщеного в свердловині (шахті), враховують притягання шару товщиною h, розміщеного вище точки спостереження A_4, а потім виключають притягання проміжного шару товщиною $H^{\gamma} - h$. Формула для обчислень має вигляд:

$$\Delta g_{\text{Б}} = \Delta g_{\text{в.п.}} + 2\pi G\delta h - 2\pi G\delta(H^{\gamma} - h), \qquad (1.92)$$

або

$$\Delta g_{Б} = \Delta g_{в.п.} + 4\pi G\delta h - 2\pi G\delta H^{\gamma}. \quad (1.93)$$

При спостереженнях на борту літака висота точки спостереження A_5 над поверхнею нормальної Землі (при $\xi = 0$) буде

$$H^{\gamma} + h$$

де: h – висота літака над поверхнею Землі.

Отже, аномалію Буге обчислюють за формулою

$$\Delta g_{Б} = \Delta g_{в.п.} - 2\pi G\delta H^{\gamma}. \quad (1.94)$$

1.15. Зв'язок між похідними гравітаційного і магнітного потенціалів

Цей зв'язок представляється теоремою Пуассона і формулюється наступним чином:

$$U = \frac{j}{\gamma\sigma} \cdot \frac{\partial V}{\partial i} \quad (1.95)$$

де U – магнітний потенціал тіла;

V – потенціал його притягання;

j- намагніченість для всього об'єму тіла;

i – напрямок намагніченості.

Тоді складова напруженості магнітного поля за яким-небудь напрямком s має вигляд:

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{j}{\gamma\sigma} \cdot \frac{\partial^3 V}{\partial s \partial i} = \frac{j}{\gamma\sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial i} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial i} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial i}\right] \quad (1.96)$$

Введено компоненти намагніченості j по координатним осям:

$$A = j\frac{\partial x}{\partial i} = j\cos(i;x)$$

$$B = j\frac{\partial y}{\partial i} = j\cos(i;y), \quad (1.97)$$

$$C = j\frac{\partial z}{\partial i} = j\cos(i;z)$$

і приймаючи s послідовно співставляючим з напрямком координатних осей, отримаємо наступні вирази складових:

$$\begin{cases} X = \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{1}{\gamma\sigma}\left[AV_{xx} + BV_{xy} + CV_{xz}\right], \\ Y = \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{1}{\gamma\sigma}\left[AV_{yx} + BV_{yy} + CV_{yz}\right], \\ Z = \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{1}{\gamma\sigma}\left[AV_{zx} + BV_{zy} + CV_{zz}\right], \end{cases} \qquad (1.98)$$

де $V_{xx} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ і т.інш – скорочені позначення других похідних потенціалу притягання, аномальні значення яких, як вже було відзначено в підрозділі про аномальні і нормальні значення других похідних гравітаційного потенціалу, тотожні зі значеннями відповідних похідних гравітаційного потенціалу *W*. Тому в подальшому в наведених формулах змінюємо *V* на *W*.

Розглянемо випадок двовимірної задачі, коли збурюючі маси мають форму циліндрів, що нескінченно витягнуті паралельно осі *y*. В такому випадку гравітаційна аномалія не змінюється вздовж осі *y*, а саме $Wyx = Wyy = Wyz$=0 і тоді з системи рівнянь (1.98) отримаємо:

$$\begin{cases} X = H = \dfrac{1}{\gamma\sigma}\left[AV_{xx} + CV_{xz}\right], \\ Z = \dfrac{1}{\gamma\sigma}\left[AV_{zx} + CV_{zz}\right] \end{cases} \qquad (1.99)$$

складова *Y* відповідно дорівнює нулеві.

У цьому випадку рівняння Лапласа набуває вигляду:

$$W_{xx} + W_{zz} = 0, \qquad (1.100)$$

а рівняння кривизни $W\Delta$:

$$W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx} = -W_{xx} = W_{zz}. \qquad (1.101)$$

Враховуючи рівняння (1.100) і (1.101), систему рівнянь (1.98) можна представити наступним чином:

$$\begin{cases} X = H = \dfrac{1}{\gamma\sigma}\left[-AW_{\Delta} + CW_{xz}\right], \\ Z = \dfrac{1}{\gamma\sigma}\left[AW_{zx} + CW_{\Delta}\right]. \end{cases} \qquad (1.102)$$

У випадку вертикальної намагніченості тіла, тобто $\mathrm{A} = 0, \mathrm{C} = j$, маємо:

$$\begin{cases} H = \dfrac{j}{\gamma\sigma} W_{xz}, \\ Z = \dfrac{j}{\gamma\sigma} W_{\Delta}. \end{cases} \tag{1.103}$$

Знаючи, що $Wzz = -(Wxx + Wyy)$ і враховуючи рівняння (1.100) і (1.101) останню формулу з системи (1.103) можна представити у вигляді:

$$Z = \frac{j}{\gamma\sigma} W_{zz}. \tag{1.104}$$

Якщо $j = const$ і $\sigma = const$, тобто для однорідно намагніченого тіла постійної густини, складові напруженості магнітного поля H і Z є відповідно пропорційними до величини других похідних гравітаціного потенціалу Wxz і $W\Delta$. Крім того, складова Z цьому випадку також вважається пропорційною до вертикального градієнта сили тяжіння Wzz.

Особливістю магнітного потенціалу, яка відрізняє його від гравітаційного, є те, що для тіла кінцевих розмірів цей потенціал безмасовий, тобто повна магнітна маса тіла завжди дорівнює нулеві: додатна магнітна маса +m в одному полюсі компенсується від'ємною магнітною масою –m в другому полюсі намагніченого тіла. Тому формальна аналогія в виразах складових напруженості магнітного і гравітаційного полів є лише в тих випадках, коли припускається , що один кінець (полюс) намагніченого тіла віднесений на нескінченність, а тіло, що збурює гравітаційну аномалію, має, навпаки, кінцеві розміри. Для прикладу, магнітна дія нескінченного довгого намагніченого стриженя, один кінець якого (полюс) знаходиться на нескінченно великій глибині, можна формально ототожнити з гравітаційним ефектом точкової маси, що співпадає просторово з верхнім полюсом намагніченого стриженя.

Проведемо порівняння аналітичних виразів гравітаційного потенціалу і його похідних для точкових мас з відповідними характеристиками магнітного поля для діполя:

Характеристика поля	Гравітаційне поле	Магнітне поле

Потенціал	$V = -\gamma\sigma\frac{1}{r}\upsilon$	$U = -\frac{1}{4\pi}j\frac{Z}{r^3}$
Напруженість (перша похідна)	$V_z = g = \gamma\sigma\frac{Z}{r^3}\upsilon$	$U_x = H = \frac{1}{4\pi}j\frac{3xZ}{r^5}$
Друга похідна потенціалу	$V_{xz} = -\gamma\sigma\frac{3xZ}{r^5}\upsilon$	.....

В наведених співвідношеннях:

γ-гравітаційна стала, $\sigma\ \upsilon$ - маса тіла, $j\upsilon = p_m$ – його магнітний момент.

Співставляючи формули між собою легко помітити, що характеристики гравітаціного і магнітного полів описуються аналогічними (за винятком коефіцієнтів) математичними виразами. Проте, як видно з співвідношень значення магнітного потенціалу і його похідних, вони в більшій мірі залежать від відстані до джерела, ніж відповідні характеристики гравітаційного поля. Так, магнітний потенціал має подібний аналітичний вираз з напруженістю гравітаційного поля, тобто з першою похідною гравітаційного потенціалу. Перша похідна магнітного потенціалу Н математично аналогічна градієнту сили тяжіння V_{xz} – другій похідній гравітаційного потенціалу.

Практична цінність виведених залежностей полягає у тому, що представляється можливим використовувати при розрахунках гравітаційних характеристик ті формули, які виведені для обрахунків магнітних аномалій і навпаки.

2. РЕДУКЦІЇ СИЛИ ТЯЖІННЯ

2.1. Необхідність та смисл введення редукцій

Вимірювання сили тяжіння проводять у різних умовах: на поверхні Землі, на морі, у горах, в шахтах, свердловинах і т. інш. [98]. Спостережені значення сили тяжіння залежать, в першу чергу, від положення точки на земній поверхні – координат і висоти, в другу чергу, від денного рельєфу. На величину вимірюваного поля впливають:

- зміна густини в надрах,
- географічне положення,
- висота пункту спостереження,
- рельєф навколишнього місцевості.

Якщо значення g та γ задані на одній поверхні, їх різниця $\Delta g = g - \gamma$ називається чистою аномалією. Так як вимірювання проводяться на фізичній поверхні Землі, яка лише в океані близька до геоїду, а γ обчислюється на поверхні відносності то, необхідно привести обидві величини до однієї поверхні.

Для порівняння гравіметричних даних їх необхідно привести до однакових умов. Таку процедуру називають редукуванням. Практично немає різниці проводити редукування спостереженого значення сили тяжіння на еліпсоїд і на ньому порівнювати його з нормальним значенням і отримувати аномалію або, навпаки, нормальне значення приводити до фізичної поверхні Землі та на ній створювати аномалію. В обох випадках необхідно знання геодезичних висот, тобто відстаней точок фізичної поверхні Землі від еліпсоїду, для якого визначено нормальне поле та закон зміни в одному випадку дійсного значення сили тяжіння на шляху між точками поверхонь, в іншому – нормального.

В геодезичній гравіметрії, де вивчається форма Землі при фактично існуючому розподілі мас, в основному застосовується редукція за висоту, яка є єдино необхідною. Всі інші відомі в гравіметрії поправки приводять до порушення основних умов теорії фігури Землі, наприклад к порушенню загальної маси Землі або появі додаткових мас над геоїдом.

В гравірозвідці, яка спрямована на вирішення задач геологічного тлумачення аномалій, такі порушення не настільки суттєві, а в деяких випадках навіть не відчутні. Основною метою при вирішенні таких задач є виділення гравітаційного ефекту густинних неоднорідностей гірських порід, звільнивши аномалії від прояву всіх інших факторів, що безпосередньо не пов'язані з геологічною будовою ділянки. Для цього необхідно вилучити всі другорядні ефекти, наприклад, вплив мас, що створюють рельєф місцевості (топографічна редукція), вплив геологічних мас між точкою спостереження та поверхнею відносності в передбаченні однорідності цих мас в даній області (поправка за проміжний шар або Буге та ін.).

Топографічна поправка або поправка за рельєф вводиться майже в усіх випадках, за винятком рівнинних ділянок, де її величини незначні. Хоча точність сучасних автоматизованих гравіметрів дозволяє за результатами зйомок використовувати і такі величини.

При геологічній інтерпретації гравіметричних даних найбільше застосовується редукція Буге, що складається з редукції у вільному повітрі та поправки за проміжний шар. За наявності на ділянці робіт яскраво виражених форм рельєфу місцевості до поправки за проміжний шар повинна бути добавлена поправка за рельєф областей, що близько примикають до неї. Останню редукцію часто називають неповною топографічною редукцією на відміну від повної топографічної редукції, коли враховується вплив мас, що складають рельєф місцевості по всій Землі.

Рідше використовується редукція Прея, проте вона необхідна при морських підводних спостереженнях, коли необхідно розрахувати силу тяжіння на поверхні моря з урахуванням мас, під якими проводилося спостереження. Суть редукції полягає у введенні поправки, що переносить притягання шару, який розташований над точкою, в притягання шару, розташованого над нею. Ця поправка дорівнюється подвоєному притяганню проміжного шару.

Існує також велика кількість інших редукцій або поправок спостережених значень сили тяжіння, що направлені на послаблення або зняття гравітаційного ефекту, який викликаний відомою або передбачуваною неоднорідністю земної кори. По суті ці редукції представляють одну з форм кількісної геологічної інтерпретації гравіметричних спостережень, яка застосовується для врахування

впливу відомих факторів, що створюють аномальне гравітаційне поле.

2.2. Редукція у вільному повітрі

Редукція у вільному повітрі, або редукція Фая, полягає в приведенні нормального значення сили тяжіння при утворенні аномалії до точки приведення. Якщо відомі висоти над рівнем моря та висоти геоїда, то таке редукування до точки спостереження може бути виконано точно. В більшості випадків, коли або висоти геоїду невідомі або не приймаються до розрахунків, редукування проводиться від точки до точки на певну висоту H.

Розглянемо Землю в виді кулі (рис. 2.1) та припустимо, що сила тяжіння, яка відома в точці B на поверхні кулі, має бути перенесена, редукована на висоту H над поверхнею кулі в точку A.

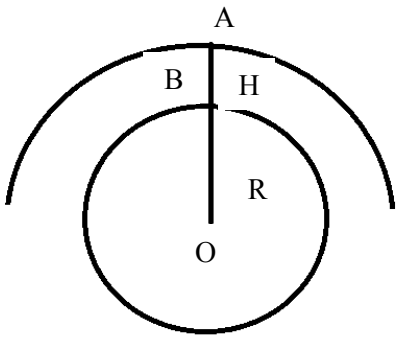


Рис. 2.1. Пояснення до виводу формули редукції в вільному повітрі **за [98]**

Притягання кулі на точку B, що розташована на його поверхні, буде

$$\gamma_0 = -G\frac{M}{R^2}.$$

Притягнення на точку A, що розташована на висоті H над поверхнею кулі, відповідно дорівнює

$$\gamma = -G\frac{M}{(R+H)^2}.$$

Відповідно маємо зміну сили тяжіння при переході від точки B до точки A

$$\delta g = \gamma - \gamma_0 = -G\frac{M}{R^2} + G\frac{M}{(R+H)^2} = -GM\left[\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+H)^2}\right] =$$

$$= -\frac{GM}{R^2}\left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{H}{R}\right)^2}\right].$$

Знаменник дробу розгорнемо по формулі бінома Ньютона і, нехтуючи членами, що містять $\left(\frac{H}{R}\right)^2$, отримаємо

$$\delta g = -2\frac{\gamma}{R}H.$$

Якщо підставити середні значення для всієї Землі $\gamma_{\text{сер.}} = 9{,}7977$ м $\cdot$ с$^{-2}$ і $R = 6371$ км, отримаємо

$$\delta g = -2\frac{\gamma}{R}H = -0{,}3086H. \qquad (2.1)$$

Чисельне значення нормального градієнта g становить 3086 Е. Поправка за зміну нормальної сили тяжіння з висотою (поправка Фая) має вигляд:

$$\delta g_{\Phi} = -0{,}3086H \qquad (2.2)$$

де Н підставляють в метрах; величину поправки отримують у мГал. Поправка враховує зміну g в залежності від відстані до центру Землі, але не враховує маси які розташовані вище рівня моря, тому її називають поправкою у вільному повітрі.

Величину

$$\Delta g = g_{\text{спос.}} - \gamma_0 + 0{,}3086H \qquad (2.3)$$

називають аномалією сили тяжіння в редукції Фая або редукцією у вільному повітрі. Редукцію Фая використовують при вивченні фігури Землі, тому що в цьому випадку зберігається повна маса Землі.

Таким чином, аномалії сили тяжіння з редукцією у вільному повітрі (Фая) відображають, з одного боку, густинну неоднорідність гірських порід під точками спостережень, з іншого – вплив зовнішніх мас, обумовлений різницею висот точок спостереження над рівнем моря. В числовому відношенні значення другого фактору прямо пропорційно висоті точки спостереження над рівнем моря та може досягати десятків мілігал, тобто в ряді випадків значно перевищувати гравітаційний ефект, викликаний неоднорідністю густини всередині земної кори. Тому, на ділянках, де відзначені

великі зміни, наприклад в декілька сотень метрів, аномалії пов'язані зі значною різницею висот точок спостережень, сильно спотворюють або повністю перекривають гравітаційний вплив неоднорідностей густини земної кори.

2.3. Поправка за денний рельєф місцевості

Ця поправка дає можливість врахувати вплив притягання всіх форм зовнішнього рельєфу та привести значення сили тяжіння в даній точці спостереження до такого, яке б було, якби над точкою розташовувався рівний шар без виступів та западин.

Поправка за денний рельєф завжди зменшує спостережене значення сили тяжіння незалежно від того, чи є поблизу точки спостереження височина або западина. Розглянемо рис. 2.2.

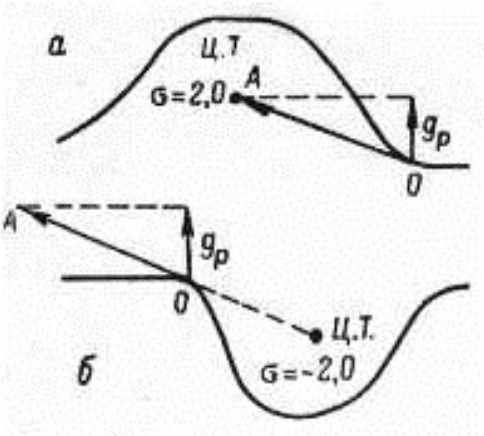


Рис. 2.2. Схеми дії додатних (а) і від'ємних (б) форм рельєфу **за [98]**

Наявність надлишкових мас (рис. 2.2.а), що розташовані вище точки спостереження, викликає додаткову силу, направлену до цих мас. Вертикальна складова цієї сили зменшить значення g. Дефіцит мас (рис. 2.2.б) також зменшить величину g відносно того її значення, яке б мала мати ця величина у випадку рівномірного

заповнення масами всієї області, що розташована нижче точки спостережень.

Наявність нерівної місцевості навколо точки спостереження, коли вплив цих неоднорідностей стає відчутним, вимагає введення поправки за рельєф. Введення у виміряне значення сили тяжіння поправки за денний рельєф обов'язкове при застосуванні будь-яких редукцій. В противному випадку (коли ці поправки відчутні) нехтування ними приводить до спотворення аномального гравітаційного поля, яке створюється невидимими підземними масами, за рахунок зовнішніх, видимих сил.

Слід відзначити, що вплив рельєфу місцевості спадає пропорційно квадрату відстані. Тому навіть вплив не дуже віддалених незначних неоднорідностей денного рельєфу виявляється мало відчутним.

Для врахування впливу оточуючого рельєфу застосовують різноманітні способи розрахунків відповідної редукції. З цією метою фізичну поверхню Землі апроксимують набором тіл правильної геометричної форми: призм, пірамід, паралелепіпедів та ін. Для кожного елементарного тіла обчислюється притягання в пункті спостереження. Величину поправки знаходять підсумовуванням ефектів від окремих тіл. Облік рельєфу в центральній зоні радіусом 200 м здійснюється вручну. Розрахунок поправки для області віддаленої більш, ніж на 200 м від пункту автоматизований, поправка знаходиться за допомогою цифрових моделей великомасштабних карт.

Обчислення поправок $\delta g_{\text{рф}}$ зводиться до інтегрування по об'єму V, який обмежений поверхнею рельєфу $\varsigma = \varsigma(\xi, \eta)$ та деякою «нормальною» поверхнею (площиною, сферою, еліпсоїдом), що проходить через гравіметричний пункт. У випадку, коли «нормальна» поверхня є горизонтальною площиною $z = const$, вираз для обчислення величини поправки за вплив рельєфу, обчислюється

$$\delta g_{\text{рф}}(x, y, z) = G\sigma \iiint_V \frac{(\varsigma - z) d\xi d\eta d\varsigma}{R^3}, \qquad (2.4)$$

де x, y, z – прямокутні координати пункту спостережень, G – гравітаційна стала, σ – густина гірських порід проміжного шару, ξ, η, ς – координати елемента маси, який враховується, $R = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\varsigma - z)^2}$, – відстань між елементом маси та

гравіметричним пунктом, V – повний об'єм топографічних мас. В циліндричній системі координат з центром в пункті спостереження величина $\delta g_{\text{рф}}$ визначається виразом

$$\delta g_{\text{рф}} = G\sigma \iiint_V \frac{\rho\xi}{(\rho^2+\xi^2)^{3/2}} d\rho d\varphi d\,\xi, \qquad (2.5)$$

де ρ, φ, ξ – циліндричні координати елемента маси об'єму V, що розташований на сферичній поверхні Землі.

Таким чином, величина поправки визначається шляхом розв'язку прямої задачі гравіметрії від різних форм рельєфу, що є відхиленнями від плоского або сферичного шару. Як відомо, пряма задача гравіметрії при відомих геометричних параметрах збурюючого об'єкту та відомій густині має єдиний розв'язок. Рельєф апроксимується набором елементарних тіл, вплив яких обчислюється аналітично, а потім підсумовується.

Специфіка розв'язку прямої задачі гравірозвідки полягає в тому, що вимагає для високоточного обчислення поправки $\delta g_{\text{рф}}$ завдання вельми густої сітки висотних позначок поблизу розрахункової точки та допускає розрідження цієї сітки по мірі віддалення від неї. В зв'язку з цим, область рельєфу, вплив якого розраховується, підрозділяється на декілька зон, що не перетинаються, для яких з різною детальністю проводиться опис рельєфу місцевості. Звичайно, ці зони називаються «центральна», «ближня», «середня» та «дальня». Вибір розмірів зазначених зон відбувається у відповідності з методикою обчислень, яка використовується, характером рельєфу місцевості, необхідною точністю обчислень і т.п.

Заслуговує уваги підхід до обчислення поправок за вплив рельєфу, який прийнятий в північноамериканському стандарті редукування (New standarts…, 2005). В ньому пропонується трирівнева процедура обчислення $\delta g_{\text{рф}}$; перша частина поправки, яка є відповідальністю виконавця робіт, використовує топографічну інформацію, що отримана інструментально в польових умовах в радіусі 100 м від пункту; друга – використовує локальні дані про висоти з високою точністю (крупномасштабні топографічні карти) до відстані 895 м від пункту спостереження; остання частина використовує цифрові рельєфу для зони від 895 м до 166,7 км, які спираються на 15'', 1', або 3' сітки, та враховують кривизну Землі при відстані більше 14 км від гравіметричного пункту. Для перших двох

зон (рівнів) рельєф апроксимується сегментованими кільцями (аналог палеточних методів), для третьої – вертикальними призмами.

На сьогодні активно за кордоном та частково в Україні обмірковуються головним чином питання підготовки цифрових моделей рельєфу (ЦМР), різні способи прискорення обчислювального процесу, враховуючи великі розміри сучасних ЦМР, а також обчислення поправок за вплив рельєфу на сферичній Землі.

2.4. Редукція Буге

З усіх видів редукцій, які використовуються при геологічній інтерпретації даних гравіметричних досліджень, найбільш широке застосування має редукція Буге. Вона представляє собою суму редукції за вільне повітря та поправки за притягання проміжного шару.

При цьому послідовність операцій при обчисленні редукції Буге виглядає наступною:

1. Нормальне значення γ, яке отримане шляхом розрахунків для точки з координатами, що відповідають точці спостережень, редукується до точки спостережень шляхом введення редукції у вільному повітрі, що дорівнює $0{,}3086H$.
2. Якщо рельєф місцевості, що оточує точку спостережень, досить нерівний, вводиться поправка за вплив рельєфу по аналітичним формулам, або розрахований за допомогою спеціалізованих програмних засобів.
3. З отриманої аномалії віднімається притягання плоского шару з відомою середньою густиною, що розташований між рівнем точки спостережень та геоїдом. Розглянемо формулу для притягання плоского шару

$$\Delta g = 2\pi G\sigma\left[\sqrt{z^2 + R^2} - z_2 + z_1\right], \qquad (2.6)$$

де z_1 і z_2 – відстані від точки спостережень до нижньої та верхньої граней плоского шару;

σ – густина проміжного шару.

Перетворимо формулу (2.6), а саме: покладемо $z_1 = 0$ і $z_2 = H$, винесемо за знак радикала R та розкладемо корінь квадратний в ряд за допомогою бінома Ньютона (H – висота шару над рівнем моря):

$$\delta g = 2\pi G\sigma\left[R\left(1+\frac{H^2}{R^2}\right)^{1/2} - H - R\right],$$

або

$$\delta g = 2\pi G\sigma\left[R\left(1+\frac{1}{2}\frac{H^2}{R^2}+\cdots\right) - H - R\right].$$

Нехтуючи членами $\frac{H}{R}$ в степені вище квадратної, знаходимо

$$\delta g = 2\pi G\sigma\left[\frac{1}{2}\frac{H^2}{R^2} - H\right] = -2\pi G\sigma H\left[1-\frac{H}{2R}\right]. \quad (2.7)$$

Підставляючи значення $\pi = 3{,}14, G = 6{,}67\cdot 10^{-8}$, отримаємо

$$\delta g_{\text{Б}} = 2\cdot 3{,}14\cdot 6{,}67\cdot 10^{-8}\sigma H\left[1-\frac{H}{2R}\right] = 41{,}8\cdot 10^{-8}\sigma H\left[1-\frac{H}{2R}\right].$$

Переводячи цей вираз в мілігали, отримаємо

$$\delta g_{\text{Б}} = 0{,}0419\,\sigma H\left[1-\frac{H}{2R}\right], \quad (2.8)$$

або наближено, коли значення $\frac{H}{2R}$ мале

$$\delta g_{\text{Б}} = 0{,}0419\,\sigma H. \quad (2.9)$$

Тоді аномалія сили тяжіння в редукції Буге набере вигляду

$$\Delta g_{\text{Б}} = g_{\text{сп.}} - \gamma_0 + 0{,}3086H - 00419\sigma H. \quad (2.10)$$

Поправка Буге дозволяє виключити вплив зовнішніх по відношенню до геоїду мас. Тому залежність аномалій Буге від висоти значно слабкіша, ніж для аномалій у вільному повітрі. Аномалії Буге в гірських місцевостях змінюються значно більш гладко, ніж аномалії у вільному повітрі.

Аномалії Буге застосовують в розвідувальній геофізиці при пошуках родовищ корисних копалин, тому що при такому редукуванні підкреслюється гравітаційний ефект густинних неоднорідностей в земних надрах. Редукування сили тяжіння в розвідувальній гравіметрії виконується для полегшення геологічного тлумачення спостережених значень g.

Редукцію Буге з поправкою за рельєф всієї Землі в цілому прийнято називати топографічною редукцією. Значення поправок Буге та неповної топографічної редукції близькі між собою, за виключенням гірських районів, де вони значно відрізняються. Введення повної топографічної редукції, що враховує вплив топографічних мас всієї Землі, практично для досить великих

регіонів приводить лише до зміни аномалій на постійну величину, і цілком істотно з точки зору геологічної інтерпретації значення не має.

При застосуванні редукції Буге величезне значення має вибір густини проміжного шару σ. У випадку, коли густина буде заниженою, числові значення аномалії Буге будуть наближатися до аномалій Фая, та може з'явитися пряма кореляція з рельєфом. У випадку завищених значень густини, навпаки, з'являються хибні аномалії, що можуть корелювати з рельєфом, проте з протилежним знаком. В такому випадку підвищенням будуть відповідати від'ємні аномалії.

Як правило за «Інструкцією з гравірозвідки» аномалії обчислюють при двох значеннях густини 2,3 та 2,67 г/см^3. Хоча цілком доречним виглядає введення редукції Буге з реальною густиною проміжного шару, яку доволі просто отримати за допомогою сучасних програмних засобів.

Якщо густини гірських порід сильно змінюються на території робіт, то при розрахунках редукції Буге вводять для різних ділянок різну густину.

2.5. Редукція Прея

Ця редукція полягає в тому, що спостережене значення сили тяжіння в точці *A* на фізичній поверхні Землі (рис. 2.3) редукується на геоїд без будь-якого зміщення мас, тобто редукція ніби переносить точку спостережень вглиб Землі, на глибину, що дорівнює висоті точки спостереження.

Ця редукція складається з наступних операцій:

1. Згладжування форм рельєфу шляхом введення топографічної поправки (рис. 2.3, б).
2. Зняття впливу проміжного шару введенням поправки Буге.
3. Перенос точки на рівень геоїда редукцією у вільному повітрі за відсутності проміжних мас (рис. 2.3, в).
4. Встановлення мас, знятих при врахуванні впливу проміжного шару введенням поправки Буге (пункт 2) (рис. 2.3, г).

Формула для введення поправки Прея є результатом віднімання з редукції у вільному повітрі подвійної поправки за вплив проміжного шару:

$$\Delta g_{\Pi} = 2\frac{\gamma}{R}H - 4\pi G\sigma H\left(1 + \frac{H}{2R}\right). \quad (2.11)$$

В числовому вигляді

$$\Delta g_{\Pi} = 0{,}3086H - 0{,}0836\sigma H. \quad (2.12)$$

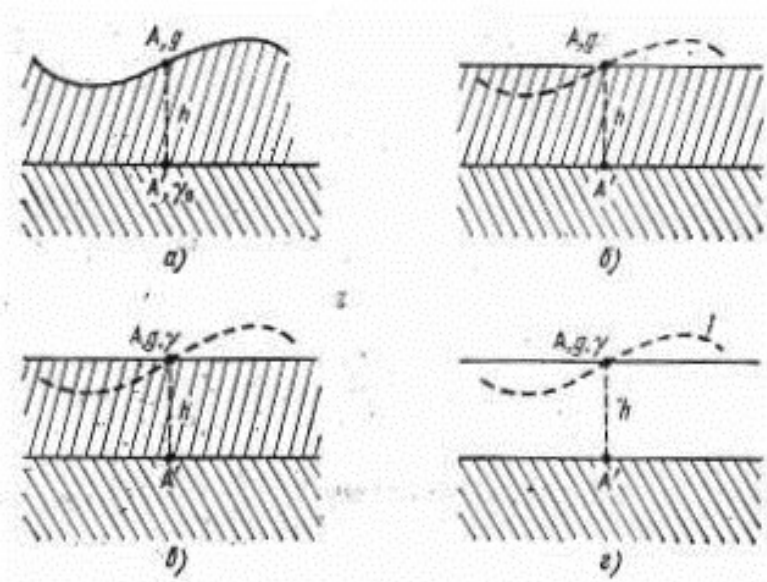


Рис. 2.3. Фізичний сенс редукцій при редукуванні на фізичну поверхнею Землі **за [98]**: а) вихідне положення, б) згладжування форм рельєфу після введення поправки за рельєф місцевості, в) перенесення γ на висоту h, г) врахування проміжного шару

Редукція Прея показує зміну сили тяжіння при зануренні в глибину Землі та враховує притягання мас, що опинилися при зануренні вище точки спостереження та зменшують значення сили тяжіння.

Свого часу редукцією Прея користувалися, що встановити характер зміни сили тяжіння при зануренні в надра Землі. З формули (2.12) очевидно, що ця зміна залежить від величини густини σ. Було

встановлено, що сила тяжіння при зануренні не змінюється при густині $\sigma = 3{,}7\ \text{г} \cdot \text{см}^{-3}$. Якщо густина менша за цю величину, то сила тяжіння із зануренням збільшується, в протилежному випадку – навпаки, зменшується. Проте це справедливо для незначних глибин, оскільки представлені формули наближені та отримані для g та R на рівні моря.

Редукція Прея вводиться для гравіметричних досліджень, що проводяться під водою або під землею. В даному випадку сила тяжіння визначається всередині мас. Вона збільшена внаслідок наближення до центру та зменшена за рахунок притягання мас, що розташовані над точкою спостережень. Останні передають елементарній масі силу, яка направлена від центру.

Спостережене значення сили тяжіння необхідно редукувати на поверхню моря, при цьому необхідно зробити приведення в вільному повітрі, а потім врахувати, що шар води, який розташований над точкою та зменшує значення g після приведення, розташовується під точкою і на ту ж саме величину збільшує значення g.

2.6. Тимчасові зміни сили тяжіння

Сила тяжіння, а саме, її величина та напрямок, не є постійною величиною в кожній точці земної поверхні, а зазнає змін (варіацій), що викликаються:

1. дією притягання небесних тіл і, в першу чергу, Місяця та Сонця, що періодично змінюють своє положення відносно точки досліджень;
2. зміною розподілу мас Землі, що є результатом геодинамічних процесів в її надрах;
3. переміщенням атмосферних мас внаслідок метеорологічних процесів;
4. зміною рівня ґрунтових вод;
5. індустріальною діяльністю людини.

Ці зміни прийнято ділити на припливні і неприпливні.

Неприпливні зміни сили тяжіння в свою чергу ділять на:

1. періодичні;

2. неперіодичні;
3. вікові.

Періодичні припливні варіації сили тяжіння невеликого періоду, що обумовлені впливом притягання Місяця, Сонця та інших небесних тіл, впевнено реєструються за допомогою сучасної гравіметричної апаратури. Такі припливні зміни сили тяжіння на сьогодні добре вивчені та широко використовуються для дослідження внутрішньої будови Землі [98].

До періодичних неприпливних змін сили тяжіння відносять:

1. періодичні коливання атмосферного тиску;
2. коливання рівня ґрунтових вод та вологості ґрунту;
3. сезонні випадання опадів;
4. товщина снігового покриву;
5. власні коливання Землі, обумовлені землетрусами і штормами в океані.

Перші чотири фактори прийнято ще називати метеорологіними.

Неперіодичні зміни сили тяжіння обумовлені:

1. неперіодичними коливаннями атмосферного тиску;
2. атмосферними опадами;
3. вологістю ґрунту і рівнем ґрунтових вод;
4. неперіодичними коливаннями швидкості обертання Землі;
5. землетрусами;
6. активною діяльністю вулканів;
7. діяльністю людини (розробка та експлуатація родовищ корисних копалин як горючих та і рудних, створення великих водосховищ).

Причинами вікових змін найчастіше виступають:

1. зміна гравітаційної сталої і уповільнення обертання Землі;
2. зміна положення мас у надрах Землі при виверженнях вулканів, землетрусах,
3. рух літосферних плит,
4. вікові рухи земної кори,
5. зміна фізичних властивостей Землі.

Так ще в 1938 р. Дірак передбачив вікове зменшення гравітаційної постійної G. Її величина повинна зменшуватись пропорційно віку Всесвіту тобто відносне зменшення складає $10^{-10} - 10^{-11}$рік$^{-1}$. Експериментального підтвердження цього

висновку отримати не вдалося. Зменшення G повинно приводити до збільшення радіуса Землі на 0,1 – 1 мм/рік.

Вікові, періодичні та неперіодичні зміни кутової швидкості Землі супроводжуються зміною відцентрового прискорення та сили тяжіння. Вікове зменшення кутової швидкості обертання Землі $2 \cdot 10^{-6}$ в 100 років викликано приливним тертям.

Але вікові зміни сили тяжіння на Землі поки що впевнено не зареєстровані сучасною гравіметричною апаратурою.

Сучасні гравіметричні спостереження за тимчасовими змінами сили тяжіння здійснюють за допомогою високоточних балістичних і надпровідних гравіметрів, які будуть розглянуті в наступних розділах підручника.

Так надпровідні гравіметри використовуються для вивчення довгоперіодичних змін сили тяжіння в Каліфорнійському університеті, Інституті прикладної геодезії у Франкфурті-на-Майні, Бельгійській королівській обсерваторії в Брюсселі.

Для правильного тлумачення тимчасових змін сили тяжіння необхідно одночасно з вимірюваннями g проводити вимірювання висот.

2.7. Припливні зміни сили тяжіння

Положення Місяця і Сонця над даною точкою поверхні Землі періодично змінюється. Відповідно змінюється їх сила притягання, що приводить до періодичних змін величини сили тяжіння $\boldsymbol{g}$ та напряму прямовисної лінії в точці Землі.

Виведемо формули, за якими можна визначити періодичні зміни сили тяжіння під дією притягання Місяця та Сонця. Теорія припливів для реальної Землі є дуже складною, та при розгляді елементарної теорії статичних припливів приймемо, що Земля: представлена кулею середнього радіуса $\boldsymbol{R}$, є абсолютно твердим тілом, а Місяць і Сонце – матеріальні точки. Згідно рис. 2.4 приймемо наступні позначення:

- $\boldsymbol{OO_1} = \boldsymbol{\rho}$ відстань від центра мас Землі $\boldsymbol{O}$ до небесного тіла $\boldsymbol{O_1}$.
- $\mathbf{AO_1}$— $\boldsymbol{\rho'}$ – відстань точки $\mathbf{A}$ на поверхні Землі від небесного тіла $\boldsymbol{O_1}$.

- ***R*** – середній радіус Землі.
- *z, z₁* – геоцентрична та топоцентрична зенітні відстані небесного тіла.

Сила притягання небесного світила діє на кожний елемент маси Землі. Для точок, що повернуті до світила, притягання є більшим, ніж на протилежному боці Землі. Результуюча сила притягання є прикладена до центра тяжіння Землі та спрямована до світила. Якщо прийняти, що центр тяжіння зазнає однакового притягання, то для двох точок земної поверхні, коли небесне тіло знаходиться в зеніті та в надирі, будемо мати максимальне зменшення сили тяжіння. При добовому обертанні кожна точка земної поверхні буде двічі знаходитись в умовах, коли сила тяжіння мінімальна. Крім того, на варіації сили тяжіння впливає різна віддаленість небесного тіла від Землі.

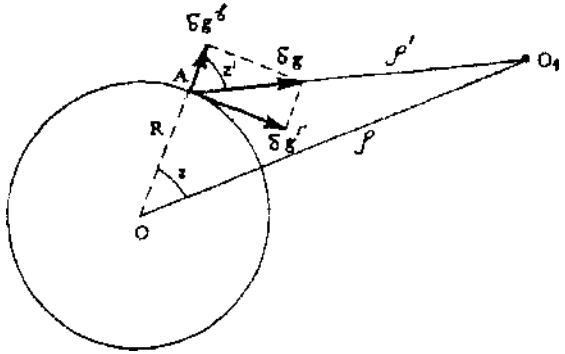


Рис.2.4 Схематичне зображення відстаней між Землею та небесним тілом за [98]

Припливний потенціал від маси небесного тіла *m* в пункті *A* буде:

$$W_A = \frac{Gm}{\rho'}, \qquad (2.13)$$

де:

$$\rho' = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos z, \qquad (2.14)$$

або

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho}\left[1 + \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{\rho}\right)\cos z\right]^{-1/2}, \qquad (2.15)$$

Якщо останній вираз розкласти в ряд за біномом Ньютона, то одержимо:

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n} P_n(\cos z), \qquad (2.16)$$

де $P_n(\cos z)$ – поліном Лежандра n порядку від cos z.

Тоді вираз для потенціалу W_A можна предтавити

$$W_A = \frac{Gm}{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2} P_n(\cos z) \qquad (2.17)$$

Для відповідного потенціалу W_A визначимо вертикальну $\boldsymbol{\Delta g}^{В}$ і горизонтальну $\boldsymbol{\Delta g}^{Г}$ складові припливної сили. Продиференціюємо вираз (2.17). Тоді,

$$\delta g^{B} = -\frac{\partial W_A}{\partial R} = -\frac{Gm}{\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nR^{n-1}}{\rho^{n}} P_n(\cos z), \qquad (2.18)$$

$$\delta g^{Г} = -\frac{\partial W_A}{R\,\partial z} = -\frac{Gm}{\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^{n-1}}{\rho^{n}}\frac{dP_n(\cos z)}{dz}. \qquad (2.19)$$

Розглянемо вертикальну складову припливної сили $\Delta g^{в}$. Якщо обмежитись третім членом розкладу, то

$$\delta g^{B} = -\frac{Gm}{\rho^{2}}\cos z - \frac{GmR}{\rho^{3}}(3\cos^{2}z-1) - \frac{GmR^{2}}{\rho^{4}}\frac{3}{2}(5\cos^{3}z-3\cos z) \qquad (2.20)$$

У цій формулі перший член дає складову припливної сили в центрі мас Землі при R=0. Зміна сили тяжіння в точці *A* буде викликана різницею припливної сили в точках *A* і O. Отже:

$$\delta g^{B} = -\frac{GmR}{\rho^{3}}(1-3\cos^{2}z) + \frac{GmR^{2}}{\rho^{4}}\frac{3}{2}(3\cos z - 5\cos^{3}z) \qquad (2.21)$$

Введемо в цю формулу середнє значення сили тяжіння для Землі, що представлена кулею, та прийнятий в астрономії горизонтальний паралакс. Тоді:

$$g = \frac{GM}{R^{3}}, \qquad (2.22)$$

$$\sin P = \frac{R}{\rho}, \qquad (2.23)$$

де M – маса Землі, *P* – горизонтальний паралакс.

Враховуючи це запишемо для $\Delta g^{в}$:

$$\delta g^{B} = g\frac{m}{M}\sin^{3}P\left[1 - 3\cos^{2}z + \frac{3}{2}\sin P\,(3\cos z - 5\cos^{3}z)\right]. \qquad (2.24)$$

Обчислимо максимальну зміну сили тяжіння за припливну зміну місячно-сонячного притягання. Відомо, що відношення мас *m/M* для Місяця дорівнює 0,01227, а для Сонця – 332000. Паралакс Сонця за рік змінюється в межах 8,65" – 9,95". а паралакс Місяця змінюється в межах 53,5' – 61,6' протягом місяця.

В кожній точці земної поверхні припливна сила обернено пропорційна кубу відстані до небесного тіла та залежить від зенітної відстані небесного тіла, яку можна визначити за формулою;

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t, \quad (2.25)$$
$$\cos t = \cos(S - \alpha) = \cos(S_0 - \lambda - \alpha) \quad (2.26)$$

В цій формулі:

$\boldsymbol{\varphi}$ – географічна широта пункту спостереження,

$\boldsymbol{\delta}$ – схилення небесного тіла,

$\boldsymbol{t}$ – годинний кут небесного тіла.

Із астрономічного щорічника на момент спостереження шляхом інтерполяції одержують значення екваторіальних координат a і δ для Місяця та Сонця, а також горизонтальні паралакси Місяця і Сонця. За даними географічними координатами $\boldsymbol{\varphi}$ і λ даного пункту розраховують на момент спостереження $\boldsymbol{\cos z}$, а відтак саму поправку за вплив притягання Сонця

$$\delta g_\theta = g\frac{m_\theta}{M}\sin^2 P_\theta \left[1 - 3\cos^2 z_\theta + \frac{3}{2}\sin P_\theta\,(3\cos z_\theta - 5\cos^3 z_\theta)\right] \quad (2.27)$$

і за вплив притягання Місяця

$$\delta g_M = g\frac{m_M}{M}\sin^2 P_M \left[1 - 3\cos^2 z_M + \frac{3}{2}\sin P_M\,(3\cos z_M - 5\cos^3 z_M)\right]$$
(2.28)

Утримуючи головний за величиною член для потенціалу припливної сили, отримаємо:

$$W = \frac{GmR^2}{2\rho^3}(3\cos^2 z - 1) \quad (2.29)$$

Відповідні формули для приливної сили, деформації рівневої поверхні і відхилення прямовисних ліній будуть:

$$\delta g = -\frac{\partial W}{\partial R} = \frac{GmR}{\rho^3}(1 - 3\cos^2 z) \quad (2.30)$$

$$\delta\zeta = \frac{W}{\gamma} = \frac{GmR^2}{2\gamma\rho^3}(3\cos^2 z - 1), \quad (2.31)$$

$$\delta\vartheta = -\frac{1}{\gamma R}\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{3}{2}\frac{GmR}{\gamma\rho^3}\sin 2z, \quad (2.32)$$

Використовуючи значення сталих R, Gm, і ρ проводиться оцінка значень цих величин. Для Місяця

$$\boldsymbol{\delta g = 54,83\left(1 - 3cos^2 z\right)}, \text{мкГал}$$
$$\boldsymbol{\delta\varsigma = 17,8\left(3cos^2 z - 1\right)}, \text{см}$$
$$\boldsymbol{\delta\vartheta = 0,0173'' sin^2 z}$$

і для Сонця

$$\boldsymbol{\delta g = 25,27\left(1 - 3cos^2 z\right)}, \text{мкГал}$$
$$\boldsymbol{\delta\varsigma = 8,2\left(3cos^2 z - 1\right)}, \text{см}$$

$$\delta\vartheta = 0,007'' sin^2 z$$

Граничні значення припливних змін дериват гравітаційного поля наведені в таблиці 2.1.

Граничні значення припливних змін дериват гравітаційного поля обчислені за умові, що Земля є абсолютно твердим тілом. Але насправді під дією припливних сил поверхня Землі деформується. В пружній твердій оболонці Землі виникає припливна хвиля, яка зміщує точку спостереження А від центра Землі та тим самим збільшує амплітуду варіацій зміни сили тяжіння приблизно в 1,2 рази. Отже, варіації сили тяжіння можуть досягати 0,3 *мГал*, варіації відхилення прямовисних ліній досягають амплітуди до 40 10^{-3}, а варіації радіуса деформованої Землі – 56 *см.*

Таблиця 2.1 – Граничні значення припливних змін дериват гравітаційного поля за [98]

z	0° δg_{min}, мкГал	90^0 δg_{max} мкГал	Коливання, МкГал	90^0 $\delta\zeta_{min}$ см	0^0 $\delta\zeta_{max}$ СМ	Коливання см	135° $\delta\vartheta_{min}$	45^0 $\delta\vartheta_{max}$	Коливання
Місяць	-109,7	+54,8	164,5	-17,8	+35,6	53,4	-0 0173	+0,0173	0,0346
Сонце	-50,5	+25,3	75,8	-82	+ 16,4	24,6	- 0,0078	+0 0078	0,0156
Сумарний вплив	-160,2	+80,1	240,3	-26,0	+52,0	78,0	-0 0251	+0,0251	0 0502

Сумарне переміщення могло б скласти 78см. Однак Земля не є ні ідеально пружною, ні ідеально жорсткою. Реальна деформація на екваторі становить 51 см, а в наших середніх широтах приблизно 40см. Таким чином земна поверхня неперервно пульсує.

Проте на величину g впливає пружна деформація тіла Землі. Для врахування варіацій теоретично обчислені значення виправляють шляхом множення на коефіцієнт, отриманий за результатами експериментальних спостережень. Величина коефіцієнта змінюється від 1,05 до 1,35. Коефіцієнт відображає локальні зміни механічних властивостей земних надр.

Реально спостережувані зміни сили тяжіння в часі виявляють істотні розбіжності з теоретично обчисленими g(t). Ця невідповідність пов'язана з наступними причинами:

1. блоковою будовою земної кори, і як наслідок цього, різним відгуком на дію приливних сил на різних ділянках Землі;
2. у розрахунках не враховується, що Місяць і Земля обертаються навколо їх загального центру тяжіння;
3. внутрішнє ядро під дією приливних сил коливається в зовнішньому ядрі, яке володіє пониженою в'язкістю.

Місячно-сонячні варіації поля в момент досягнення максимальних значень відіграють роль спускового механізму для деяких геологічних процесів: вивержень вулканів, землетрусів і т. п.

Поправка за припливні зміни сили тяжіння в результати гравіметричних спостережень

Результати гравіметричних спостережень повинні бути виправлені припливними поправками. Якщо необхідно врахувати припливну поправку $\boldsymbol{\delta g}_{\text{пр}}$ з точністю до 10 мкГал, то використовують наближену формулу

$$\delta g_{\text{пр}} = 12g\frac{m}{\text{м}}sin^3p(3cos^2z - 1) \qquad (2.33)$$

Цю поправку додають до виміряного значення сили тяжіння

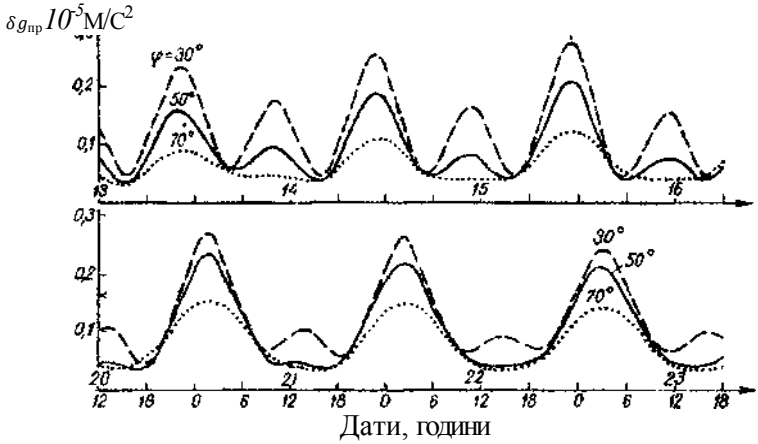
$\boldsymbol{g} - \boldsymbol{g}_{\text{вим}} + \boldsymbol{\delta g}_{\text{пр}}$.

Використовуючи числові значення величин g, $\frac{\text{m}}{\text{м}}$ і *P,* для сумісного впливу Місяця та Сонця одержимо

$$\delta g_{\text{пр}} = \left[55\left(3cos^2z_{)} - 1\right) + 25(cos^2z_{\theta} - 1)\right], \text{ мкГал.} \qquad (2.34)$$

При відносних вимірюваннях прискорення сили тяжіння до величини поправки додають стале число (наприклад, 0,3 *мГал),*щоб поправка за припливні зміни завжди була додатною. На кожний день і час спостережень для величини $\delta g_{\text{пр}}$*+0,3 мГал* складають графіки (див. рис. 2.5) в залежності від широти.

Так, на графіку показані зміни припливної поправки в силу тяжіння для різних широт і дат. Шляхом інтерполювання можна зняти з графіка відповідну поправку за припливні зміни сили тяжіння для проміжних широт, Крім графіків, можна використати таблиці припливних поправок на конкретну дату та час спостереження.



Поправку за місячно-сонячні припливні зміни в силу тяжіння при точних спостереженнях (порядку 1 *мкГал* і точніше) обчислюють для кожного гравіметричного пункту на момент спостереження за більш точною формулою:

$$\delta g = 1.2g\frac{m_{☽}}{м}sin^3P_{☽}\left[\left(3cos^2z_{☽}\right) + \frac{3}{2}sinP_{☽}(5cos^3z - 3\cos z) + \right.$$
$$\left. +1.2g\frac{m_{\theta}}{м}sin^3P_{\theta}(3cos^2z_{\theta})\right] \qquad (2.35)$$

Її вводять при створенні опорних гравіметричних мереж і абсолютних визначеннях, а також при вивченні неприпливних змін сили тяжіння.

Рис.2.5. Припливні варіації сили тяжіння за [98]

Припливні зміни сили тяжіння можна спостерігати на припливних станціях з використанням статичних гравіметрів (переважно “Асканія” GS-11 і GS-12, GS-15). Точність реєстрації гравіметричних припливів цими приладами складає 1 *мкГал.*

Реєстрацію нахилів рівневої поверхні відносно поверхні Землі здійснюють за допомогою горизонтальних маятників або нахиломірів, сучасна точність яких (1"-2")10^{-4} . Це означає, що з такою точністю коливаються відхилення прямовисних ліній, які викликають зміну перевищень, яку одержують із геометричного нівелювання. Перші спостереження припливних змін сили тяжіння в Україні були виконані в Полтавській гравіметричній обсерваторії

з гравіметром ГРАФ-2 в 1955 році. Широкий розвиток вони одержали на початку шістдесятих років XX сторіччя, коли обсерваторія придбала два гравіметри фірми “Асканія” GS-11 і GS-12.

2.8. Неприпливні зміни сили тяжіння

Для перевірки геодинамічних гіпотез і моделей Землі, для вивчення тектонічних процесів, сейсмічних явищ, вулканізму використовуються неприпливні зміни сили тяжіння в геофізиці. Дослідження неприпливних змін сили тяжіння в геодезії необхідне для вивчення зміщення центра мас Землі, зміни поверхні Землі і елементів аномального поля, стабільності інженерних споруд.

Результати порівняння високоточних повторних абсолютних вимірювань сили тяжіння дають цінну інформацію для багатьох природничих наук і підвищують впевненість результату дійсної зміни сили тяжіння.

Наведемо деякі результати досліджень впливу ряду факторів, які обумовлюють неприпливну зміну сили тяжіння.

Річний рух полюсів Землі внаслідок вільної нутації досягає за амплітудою $3''$. З цієї причини зміна сили тяжіння може досягати 15 мкГал за півроку. М. Парійський і М. Молоденський показали, що зміни сили тяжіння з швидкістю 1 – 2 мкГал/рік можна пояснити нерівномірним обертанням Землі.

Детальні дослідження щодо врахування впливу геофізичних факторів на деривати гравітаційного поля Землі виконав П.Д.Двуліт (табл. 2.2) [98].

Таблиця 2.2 Максимально можливий вплив геофізичних факторів на деривати гравітаційного поля

Геофізичні фактори	Прискорення сили тяжіння, мкГал	Деформація рівневої поверхні, см	Відхилення прямовисних ліній, $1\,10^{-4}$сек.дуги
1. Атмосферні	10-20	2-3	5-7

2. Сніговий	5-10	1-2	2-5
3 . Зміни рівня ґрунтових вод	10-100	4-5	1-3

Періодичні та неперіодичні зміни рівня ґрунтових вод, зміни об'ємів води в водоймищах, артезіанських басейнах і інші гідрологічні ефекти викликають варіації сили тяжіння 7 – 8 мкГал, а в деяких випадках можуть перевищувати 0,1 мГал. Сезонні зміни рівня Світового океану викликають векторні зміщення центра мас Землі на величину порядку 2 мм, що приводить до глобальних векторних змін сили тяжіння на земній поверхні до 0,6 мкГал. Глобальні переміщення атмосферних мас Землі приводять до зміни сили тяжіння на 1,3 мкГал. Короткочасні і сезонні переміщення атмосфери в регіональному і локальному масштабах викликають зміну сили тяжіння до 10 – 20 мкГал.

Сніговий покрив має сезонний характер, а зміна сили тяжіння обумовлена цим може досягати 5 – 10 *мкГал.*

2.9. Вікові зміни сили тяжіння

Вікові зміни сили тяжіння на Землі поки що не були виявлені, але про існування їх зроблені відповідні теоретичні припущення. Причиною вікових змін сили тяжіння можуть бути вертикальні рухи земної поверхні, які зумовлені тектонічними процесами, зміною густини порід у надрах Землі внаслідок розширення речовини радіоактивним підігріванням, фазових перетворень і переміщення мас. Зміна швидкості обертання Землі впливає на зміни відцентрової сили, що приводить до зміни сили тяжіння. Зміна положення мас при виверженні вулканів, землетрусів також приводить до зміни сили тяжіння. Так, в Японії у районі активних вулканів були виявлені зміни сили тяжіння до 5 *мГал,* причиною яких вважали підйом магми, густина якої відрізняється від густини оточуючих порід.

Причиною вікової зміни сили тяжіння може бути вікова зміна гравітаційної сталої. Але для виявлення вікових змін сили тяжіння необхідно виконувати повторні високоточні вимірювання абсолютного значення сили тяжіння протягом тривалого часу. В

зв’язку з тим, що епоха точних гравіметричних вимірювань налічує декілька десятиліть, вивчення вікових змін сили тяжіння тільки починається.

3. ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ТЕОРІЇ СИЛИ ТЯЖІННЯ

Теорія поля сили тяжіння дозволяє нам оцінювати характеристики поля і аналізувати гравіметричні дані. Знання основ теорії необхідно і при виконанні вимірювань [99]. Надалі будемо розглядати незмінне у часі земне поле, але усе викладене справедливо і для інших небесних тіл. Вивченню поля сили тяжіння приділяється велика увага в підручниках по теорії потенціалу [65, 100, 101], а також по геодезії і геофізиці [1, 102-122].

3.1. Поле тяжіння і рішення прямої задачі

У відповідності з рівнянням (1.3) сила, що діє на частинку в околиці точки A, прямо пропорційна масі$\Delta m(A)$ [Кауфман]. Уявимо собі , що ця маса зменшується. Тоді сила $d\overrightarrow{F(A)}$також буде зменшуватися, але відношення

$$\frac{d\overrightarrow{F(A)}}{dm}$$

залишатиметься сталим і характеризувати величину g, яка називається полем тяжіння в точці А:

$$\vec{g}(A) = -G\int_V \frac{\delta(B)dV}{R^3}\vec{R}\ . \qquad (3.1)$$

Припускаючи розподіл мас усередині об'єму Vзаданим, ця векторна функція $\vec{g}(A)$ залежить тільки від координат точки спостереження A та за визначенням є полем. Доречно розглядати маси в об'ємі V як джерела поля $\vec{g}(A)$. Іншими словами, ці маси створюють поле в будь-якій точці простору, і передбачається, що поле існує незалежно від того, знаходяться маси в цій точці або ні. Коли елементарна маса розміщується в деякій точціA, на неї діє сила, рівна

$$\vec{F}(A) = \Delta m(A)\vec{g}(A), \qquad (3.2)$$

яка призводить до руху маси. По суті, всі методи вимірювання гравітаційного поля засновані на використанні рівняння (3.2).

Можна сказати, що в кожній точці поле притягання «чекає» маси, щоб створити силу і викликати рух.

Функцію $\vec{g}$ можна інтерпретувати також зовсім іншим способом. Як випливає з другого закону Ньютона, $\vec{g}(A)$ представляє прискорення елементарної маси, викликане силою $\vec{F}(A)$. В основному ми будемо застосовувати концепцію поля, проте іноді будуть використовуватися обидва підходи.

Оскільки взаємодія мас зазвичай не впливає на їх густину вона може бути задана. Іншими словами, густина кожної речовини є відомим параметром, що дуже важливо, оскільки це означає, що рівняння (3.2) дозволяє вирішити пряму задачу за допомогою інтегрування. Однак, загалом, це не так, і, наприклад, обертання рідини, що стискається, викликає зміну її густини. Для інших геофізичних методів джерела поля зазвичай не можуть бути визначені до того, як буде розраховано поле, тому розв’язок прямої задачі вимагає розв’язку крайової задачі.

Звичайно, чудова простота розв'язку прямої задачі в поле тяжіння є виключною. Рівняння (3.1) може бути застосоване в будь-якій точці простору, включаючи і об’єм, в якому знаходяться маси. В цьому випадку відстань Rможе прямувати до нуля, і це природно викликає підозру, що використання рівняння (3.1) у цих випадках неправомірно. Проте, як згадувалося раніше і буде доведено в подальшому, сингулярність підінтегрального виразу може бути усунена, і рівняння (3.1) дає вірне значення поля тяжіння всередині маси. Очевидно, що із зростанням відстані між точкою спостереження A і тілом вектор $\vec{R}$ практично перестає залежати від точкиB. Відповідно, в межах, коли R прямує до нескінченності, ця величина може бути виведена зпід знака інтеграла, і ми отримаємо :

$$\vec{g}(A) = -G\frac{\int_V \delta(B)dV}{R^3}\vec{R} = -G\frac{m}{R^3}\vec{R}, \qquad (3.3)$$

де B – довільна точка тіла, а m – його маса . Таким чином, незалежно від розмірів і форми на великих відстанях тіло створює приблизно таке ж поле притягання , як і елементарна частинка.

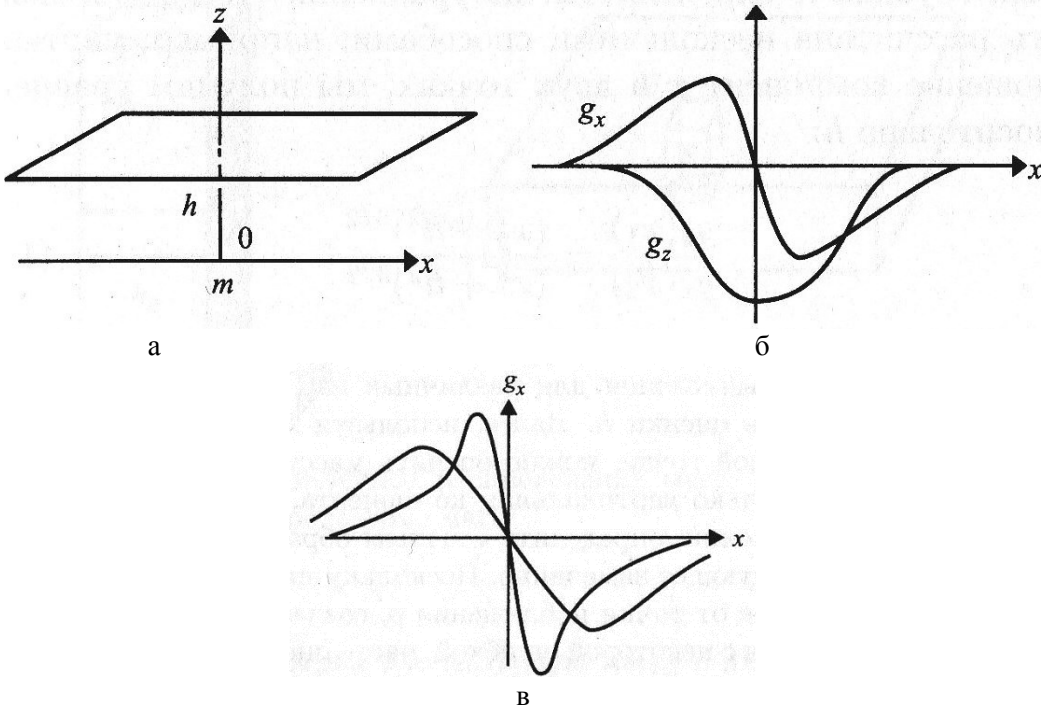


Рис. 3.1 Випадки розв’язку прямої задачі за [99]
а – елементарна маса поверхні спостережень, б –поведінка горизонтальної і вертикальної компонент поля, в – вплив положення мас

Для ілюстрації рівняння (3.3) розглянемо розв'язок прямої та оберненої задач у найпростішому з можливих випадків, коли поле створюється елементарної масою.

Припустимо, що частинка з масою $m(B)$ розташована в точці початку декартової системи координат (рис. 3.1, а), а поле спостерігається на площині $z = h$.

Тоді, як слідує з рівняння (3.3), компоненти поля тяжіння в точці $B(x, y, z)$ дорівнюють:

$$g_x(x, y, h) = -G\frac{mx}{R^3}, \qquad g_y(x, y, h) = -G\frac{my}{R^3},$$

$$g_z(x, y, h) = -G\frac{mh}{R^3}, \tag{3.4}$$

оскільки

$$\vec{R} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k},$$

тут $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, – одиничні вектори, спрямовані вздовж координатних осей.

Таким чином, розв'язок прямої задачі тривіальний. Зокрема, вздовж лінії , де $y = 0$ і $z = h$, маємо:

$$g_x(x, 0, h) = -G\frac{mx}{(x^2 + h^2)^{3/2}}, \qquad g_y(x, 0, h) = 0,$$

$$g_z(x, 0, h) = -G\frac{mh}{(x^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Поведінка обох компонент як функцій x показано на рис.3.1, б і може бути легко пояснена. Насамперед горизонтальна компонента зникає над тілом, оскільки поле направлено до тіла. Також $g_x(x)$має два екстремуми, положення яких визначається наступною умовою:

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} = 0.$$

Обчислюючи похідну, знаходимо

$$x_e = \frac{h}{\sqrt{2}}, \tag{3.5}$$

і зі зменшенням глибини частинки екстремум спостерігається при менших значенняхx, але величина поля в них зростає(рис.3.1, в). Для від'ємних значень x горизонтальна компонента g_xдодатна, і це зрозуміло, оскільки поле направлено до маси і утворює кут з віссю x менше 90 °. Навпаки, при x> 0 цей кут перевершує 90 і компонента стає від'ємною. Ясно, що вертикальна компонента $|g_z|$ має максимум при $x = 0$ і поступово зменшується з відстанню x . На

досить значних відстанях ми маємо $g_x > g_z$, що випливає з того, що поле стає майже горизонтальним.

Зауважимо, що на таких відстанях вертикальна компонента зменшується швидше, ніж R^{-2}. Розв'язокоберненої задачі також досить простий. Наприклад, якщо відома тільки компонента g_x, то її нульова величина визначає положення тіла (координату x). Водночас, глибина h визначається з рівняння (3.5), вона може бути розрахована декількома способами; наприклад, з огляду на відношення компонент x у двох точках, ми отримаємо рівняння відносно h:

$$\frac{g_x(x_1)}{g_x(x_2)} = \frac{\left(x_2^2+h^2\right)^{3/2}}{\left(x_1^2+h^2\right)^{3/2}} \tag{3.6}$$

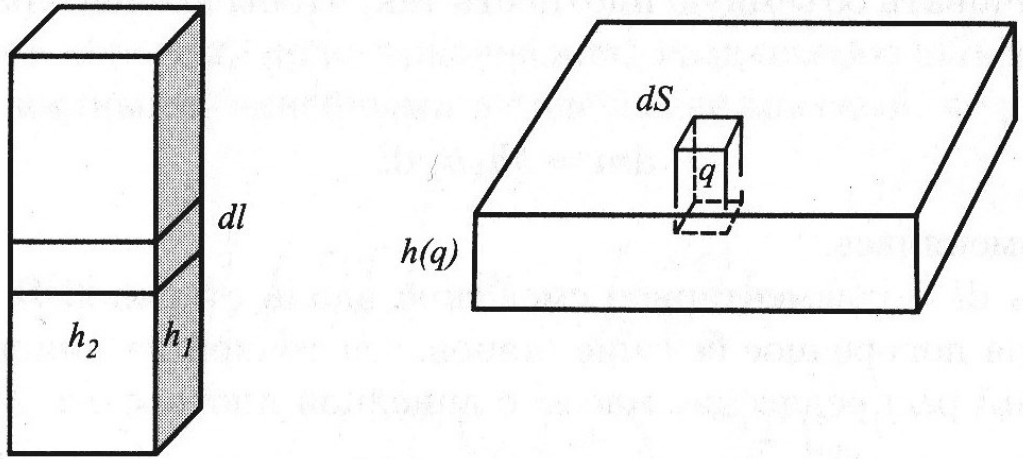
Повторюючи ці обчислення для різних пар $g_x(x)$, можна підвищити точність оцінки h. Далі, використовуючи значення цієї компоненти в будь-якій точці, можна оцінити масу m. У разі коли відома тільки вертикальна компонента, положення і величину маси можна визначити подібним чином.

Доречно тут зробити наступне зауваження . Оскільки будь-яке тіло , що досить віддалене від точки спостереження A, створює поле, яке відомо завжди з деякою помилкою, часто воно практично не може бути відрізнено від поля точкової частинки, і тому можна визначити тільки добуток об'єму на густину, тобто масу, а величина кожної з них окремо залишається невідомою. Це є першою ілюстрацією того факту, що обернена задача в гравіметрії, як і в інших геофізичних методах, відноситься до некоректно поставлених задач, оскільки деякі параметри тіла не можуть бути визначені.

3.2. Різні типи мас і їх густини

Як вказувалося вище, рівняння (3.1) дозволяє знайти поле тяжіння скрізь, але для цього потрібно, взагалі кажучи, досить громіздке інтегрування [Кауфман]. Однак, у багатьох випадках обчислення поля $\vec{g}(A)$ можна істотно спростити.

Для початку розглянемо елементарну масу з густиною $\delta(B)$, яка займає об'єм ΔV. Будемо тепер збільшувати густину і зменшувати об'єм таким чином, щоб маса залишалася сталою.



а б

Рис.3.2. Ілюстрація різного розподілу мас за [99]
а -лінійне розподіл мас ; б - поверхневий розподіл мас

За визначенням ці зміни не здійснюють суттєвого впливу на поле, оскільки точка спостереження A знаходиться далеко. У межі, коли

$$\Delta V \to 0 \text{ і } \delta \to \infty,$$

ми прийдемо до математичного поняття точкової маси $m(B)$. Відповідно, її поле тяжіння визначається рівнянням (3.3). Звичайно, неможливо помістити масу в точку, і точкова маса служить тільки наближеним поданням реального тіла.

Припустимо, що елементарний об'єм представлений кубом з довжиною сторони h. Тоді при переході до точкової маси густина зростає як h^{-3}. Припустимо далі, що об'єм $V(B)$ має форму стриженя (рис.3.2, а) з поперечним перерізом

$$S = h_1 h_2$$

і відстань до точки спостереження задовольняє умовам

$$R \gg h_1 \text{ і } R \gg h_2.$$

Тоді ми можемо зменшувати елементарний об'єм $dV = h_1 h_2 dl$ і збільшувати об'ємну густину так, щоб елементарна маса не змінювалася

$$dm = \delta(B) h_1 h_2 dl,$$

тут dl– елементарне зміщення вздовж стрижня.

У межі, коли поперечний переріз стає точкою на лінії l, ми отримуємо розподіл маси з лінійною густиною λ:

$$\lambda(B) = \delta(B) h_1 h_2,$$

де

$\delta(B) \to \infty$ і $h_1 \to 0$, $h_2 \to 0$.

Ясно, що $\delta(B)$ прямує до нескінченності як h^{-2}, і ми маємо інше математичне поняття маси. Відповідно, рівняння для поля тяжіння приймає наступний вигляд:

$$\vec{g}(A) = -G \int_l \frac{\lambda(B)}{R^3} \vec{R} dl \qquad (3.7)$$

і об'ємне інтегрування зводиться до набагато більш простого лінійного. Нарешті припустимо, що маси розміщуються в доволі тонкому шарі, так що його товщина $h(B)$ набагато менше відстані R (рис.3.2, б).

Розглянемо елементарний об'єм $dV = h(B) dS$, маса якого дорівнює $dm = \delta B h(B) dS$. Зменшуючи тепер товщину шару із збереженням маси dm, на межі ми отримуємо поверхню з густиною $\sigma(B)$:

$$\sigma(B) = \delta(B) h(B).$$

У цьому випадку об'ємна густина прямує до нескінченності як h^{-1}, коли $h(B)$ прямує до нуля. Відповідно, вираз для поля приймає вигляд:

$$\vec{g}(A) = -G \int_S \frac{\sigma(B)}{R^3} \vec{R} dS. \qquad (3.8)$$

і об'ємне інтегрування замінюється інтегруванням по поверхні.

Таким чином, поле тяжіння, створюване об'ємними, поверхневими, лінійними і точковими масами, має вигляд:

$$\vec{g}(A) = -G \left[\int_V \frac{\delta(B)}{R^3} \vec{R} dV + \int_S \frac{\sigma(B)}{R^3} \vec{R} dS + \int_l \frac{\lambda(B)}{R^3} \vec{R} dl + \sum \frac{m(B)}{R^3} \vec{R} \right] \qquad (3.9)$$

Ми прийшли до висновку, що об'ємна густина прямує до нескінченності за різними законами близько точкових, лінійних і поверхневих мас, і це впливає на поведінку поля поблизу них. Звичайно, рівняння (3.1) завжди дозволяє обчислити поле тяжіння $\vec{g}$. У той же час використання рівняння (3.9) у багатьох випадках значно спрощує цю процедуру.

3.3. Дві фундаментальні властивості поля тяжіння

Оскільки рівняння (3.1) дозволяє знайти розв’язок прямої задачі для будь-якого розподілу мас, можна сказати, що в цьому сенсі теорія гравіметрії повністю розроблена. Проте, для кращого розуміння поведінки поля Землі і в деяких випадках для збільшення якості розв’язку обернених задач корисно вивчити загальні властивості поля тяжіння і ввести також поняття потенціалу .

3.3.1. Незалежність інтеграла $\int_l \vec{g}\, dl$ від шляху інтегрування

Розглянемо спочатку поле елементарної маси і обчислимо інтеграл вздовж прямої лінії, зображеної на рис.3.3, а. Отримаємо:

$$-Gm \int_{A_1}^{A_2} \frac{\vec{R} dl}{R^3} = -Gm \int_{A_1}^{A_2} \frac{dR}{R^2} = Gm \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right). \qquad (3.10)$$

Очевидно, що інтеграл уздовж дуги кола з радіусом R, дорівнює нулю, оскільки поле $\vec{g}(A)$ перпендикулярно шляху інтегрування.

Тому, як і раніше, інтеграл вздовж шляху, зображеного на (рис. 3.3, б, визначається інтегралом вздовж прямої лінії.

Розглянемо тепер більш складний шлях, показаний на (рис. 3.3, с. Інтегрування між точками A_1 іA_3дає :

$$\int_{A_1}^{A_3} \vec{g} dl = Gm\left[\left(\frac{1}{R_{BA_3}} - \frac{1}{R_{BA_2}}\right) + \left(\frac{1}{R_{BA_2}} - \frac{1}{R_{BA_1}}\right)\right],$$

або

$$\int_{A_1}^{A_3} \vec{g} dl = Gm\left(\frac{1}{R_{BA_3}} - \frac{1}{R_{BA_1}}\right) \qquad (3.11)$$

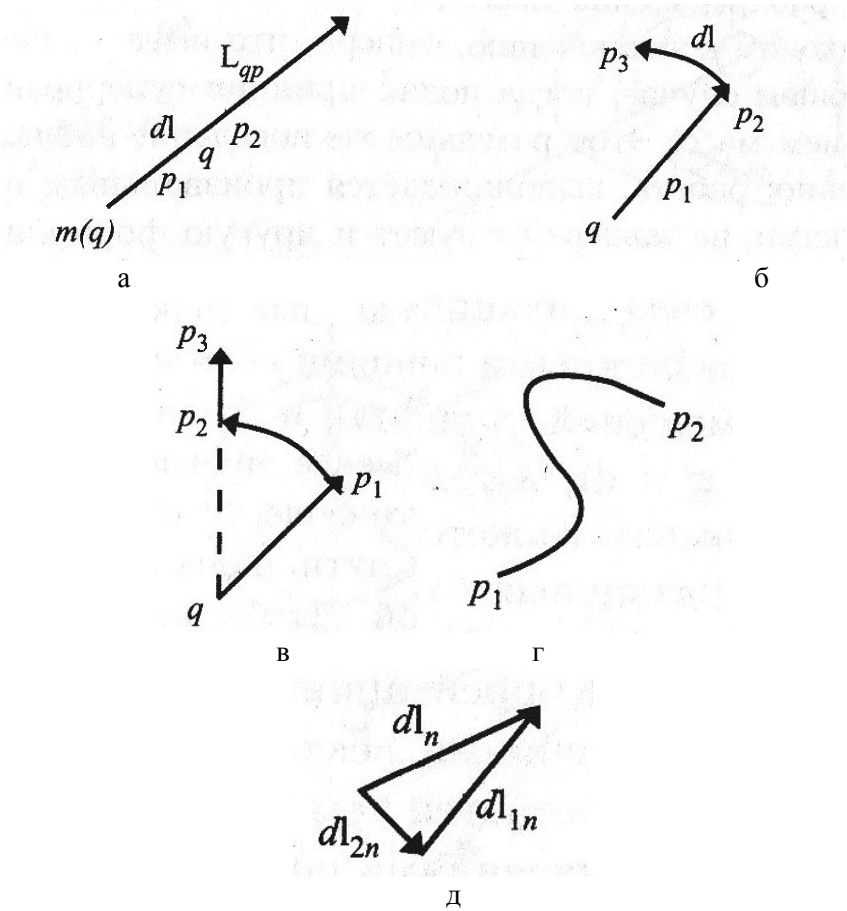


Рис. 3.3. Різноманітні шляхи інтегрування поля g за [99]

Порівнюючи рівняння (3.10) і (3.11), бачимо, що в обох випадках значення інтегралів визначаються відстанню від частинки до кінцевих точок шляху інтегрування. Узагальнимо цей результат на випадок довільного шляху (рис. 3.3, в).

Кожне елементарне зміщення може бути представлено у вигляді суми двох перпендикулярних векторів (рис. 3.3, г):

$$\overrightarrow{dl_n} = \overrightarrow{dl_{1n}} + \overrightarrow{dRl_{2n}},$$

тут $\overrightarrow{dR_{1n}}$– зміщення вздовж радіус-вектора, проведеного з точки B, а $\overrightarrow{dR_{2n}}$ – елемент дуги радіуса R_{AB}.

Отримуємо

$$\vec{g}(A)\overrightarrow{dl_n} = \vec{g}(A)\overrightarrow{dl_{1n}},$$

і інтеграл уздовж елементарного зміщення $\overrightarrow{dR_n}$ може бути записаний у вигляді:

$$\int_{A_n}^{A_{n+1}} \vec{g}\overrightarrow{dl_n} = \mathrm{Gm}\left(\frac{1}{R_{BA_{n+1}}} - \frac{1}{R_{BA_n}}\right). \qquad (3.12)$$

Беручи до уваги те, що інтервал дуже малий, інтеграл дорівнює $\vec{g}\overrightarrow{dl_n}$ і права сторона рівняння (3.12) дає значення цього добутку. Виконуючи підсумовування цих інтегралів вздовж шляху з початковою і кінцевою точкамиA_1 і A_{12}, отримаємо:

$$\int_{A_1}^{A_2} \vec{g}\vec{dl} = Gm\left(\frac{1}{R_{BA_2}} - \frac{1}{R_{BA_1}}\right). \qquad (3.13)$$

Як і в першому випадку, інтеграл визначається тільки положенням початкової та кінцевої точки, а форма і довжина шляху ніяк не впливають на його значення. Таким чином показано, що у разі одиночної елементарної маси інтеграл у рівнянні (3.13) не залежить від шляху.

Припустимо тепер, що існує довільний розподіл мас. Застосовуючи принцип суперпозиції, ми приходимо до висновку, що така ж поведінку спостерігається і в загальному випадку, коли поле створюється довільним розподілом мас.

Цей результат має і інше формулювання, а саме: робота, що здійснюється полем тяжіння між двома точками, не залежить від шляху інтегрування. Звичайно, це дивний факт, який було б непросто передбачити.

Дійсно, змінюючи шлях, що з'єднує дві дані точки, нам доводиться мати справу з різними значеннями поля і з різними

орієнтаціями зміщень, довжиною шляху і скалярними добутками векторів $\vec{g}$ і <$d\vec{l}$, і, в решті-решт, значення інтеграла залишається тим же самим. Здається, що існує зв'язок між значеннями поля в різних точках шляху, і воно таке, що величина інтеграла залишається сталою.

Щоб підкреслити таку властивість поля, уявимо собі наступний експеримент: припустимо , що відстань між точками A і B дорівнює 1 м. Перший шлях буде прямою лінією, що з'єднує ці точки. Виконуючи інтегрування скалярного добутку $\vec{g}d\vec{l}$, ми отримаємо деяке значення інтеграла. Другий шлях буде зовсім відмінним від першого і буде проходите через усі гори і океани на Землі, перш ніж досягне точки B. Протягом цього шляху ми вимірюємо поле тяжіння в кожній точці шляху і обчислюємо добуток $\vec{g}d\vec{l}$, проте підсумовування цих величин дає результат, який в точності збігається з результатом інтегрування по прямій лінії.

3.3.2. Зв'язок між потоком поля тяжіння і його джерелами (масами)

Встановимо тепер другу чудова властивість поля притягання. Як і раніше, спочатку будемо розглядати поле точкової маси $m(B)$.

За визначенням, потік поля через елементарну поверхню dS (рис. 3.4, а) дорівнює

$$\vec{g}dS = -G\frac{m}{R^3}\vec{R}dS. \qquad (3.14)$$

Як відомо тілесний кут в точці B стягується поверхнею dS,

$$\frac{\vec{R}dS}{R^3} = d\omega. \qquad (3.15)$$

Таким чином, в цьому випадку потік може бути представлений у вигляді:

$$\vec{g}(A)d\vec{S} = -Gm(B)d\omega(B). \qquad (3.16)$$

Зауважимо, що потік поля тяжіння – чисто математичне поняття, яке не має ніякого фізичного сенсу. Обчислимо тепер потік через поверхню S (рис. 3.4, б). Виконуючи інтегрування, отримаємо :

$$\int \vec{g}(A)d\vec{S} = -Gm(B)\,\omega(B), \qquad (3.17)$$

де $\omega(B)$– тілесний кут в точці B, що стягується поверхнею S. Він може бути додатним, від’ємним або нульовим.

Розглянемо тепер найбільш цікавий випадок, коли поверхня S замкнута. Тоді, як добре відомо, тілесний кут дорівнює 4π, якщо точка B розміщується всередині об'єму V, який обмежений поверхнею S, і кут дорівнює нулю, коли B знаходиться зовні об'єму. Відповідно рівняння (3.17) може бути записано у вигляді:

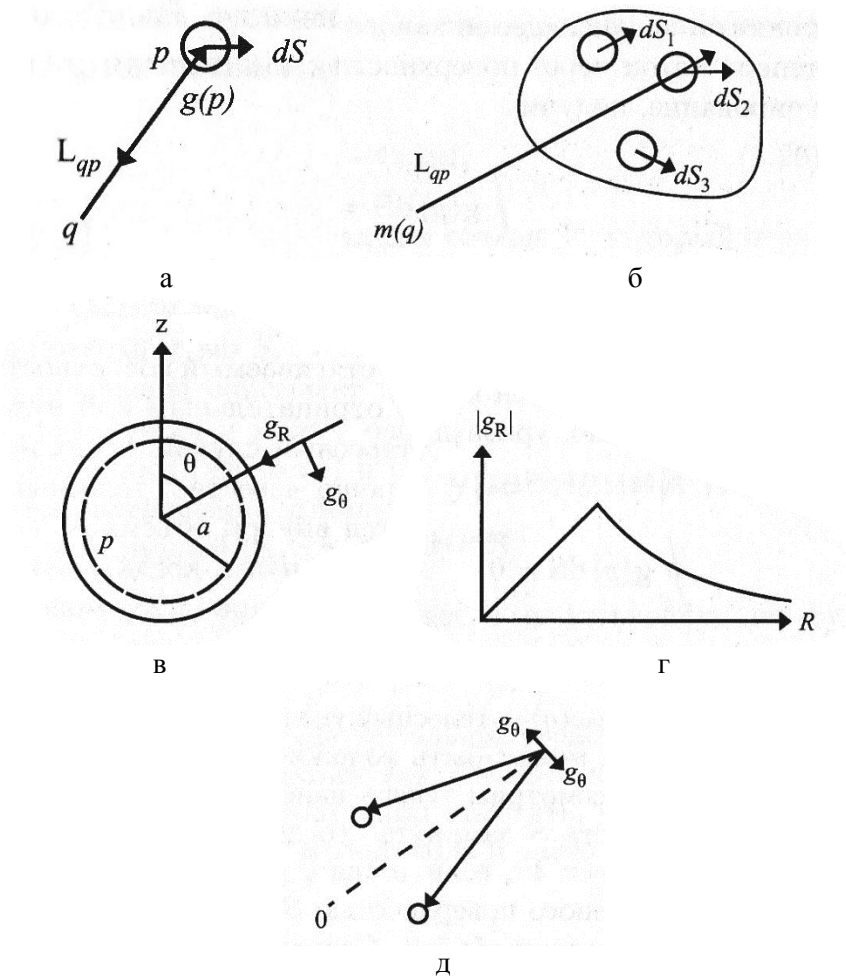


Рис. 3.4. Ілюстрація зв'язку між потоком поля тяжіння і його масами за [99]

а -потік через елементарну поверхню ; б - потік як сума елементарних потоків; в - компоненти поля, викликаного сферичної масою; г - симетрія поля; д - поле всередині і поза сферичної маси

$$\oint_S \vec{g}(A)d\vec{S} = 0 \qquad (3.18)$$

в тому випадку, коли маса знаходиться поза об'єму V, і

$$\oint_S \vec{g}(A)d\vec{S} = -4\pi Gm(B) \qquad (3.19)$$

в тому випадку, коли вона знаходиться десь всередині V (B – точка на замкнутій поверхні).

Відповідно з рівнянням (3.18) потік, що створений масою, що знаходиться поза об'єму V, дорівнює нулю незалежно від положення маси $m(B)$. Звичайно, це чудовий факт. Дійсно, в кожній точці поверхні маса створює поле, і скалярний добуток $\vec{g}d\vec{S}$, взагалі кажучи, відрізняється від нуля. Однак сума цих елементарних потоків по замкнутій поверхні дорівнює нулю.

Більш того, зміна поверхні веде до зміни елементарних потоків, але їхня сума, тобто інтеграл, зникає, якщо тільки замкнута поверхня не перетинає масу.

Таким чином, потік нечутливий до мас, які є поза об'єму V. Важливо, що потік залишається тим же самим незалежно від розміщення елементарної маси, форми і розташування замкнутої поверхні, що його оточує. Знову застосовуючи принцип суперпозиції , для довільного розподілу мас отримуємо :

$$\oint_S gdS = -4\pi GM, \qquad (3.20)$$

де M– повна маса, яка перебуває в об'ємі V, який обмежений поверхнею S.

Це рівняння описує другу фундаментальну властивість поля тяжіння і може розглядатися як «зв'язок» між джерелами (масами) і полем.

Необхідно відзначити, що подібне співвідношення виконується для будь-якого поля і часто називається формулою Гаусса.

3.4. Система рівнянь поля тяжіння

У попередньому підрозділі ми встановили дві фундаментальні властивості поля тяжіння, обидві вони слідують із закону притягання Ньютона і принципу суперпозиції [99].

Перша властивість – незалежність роботи поля тяжіння від шляху між двома точками – записується у вигляді

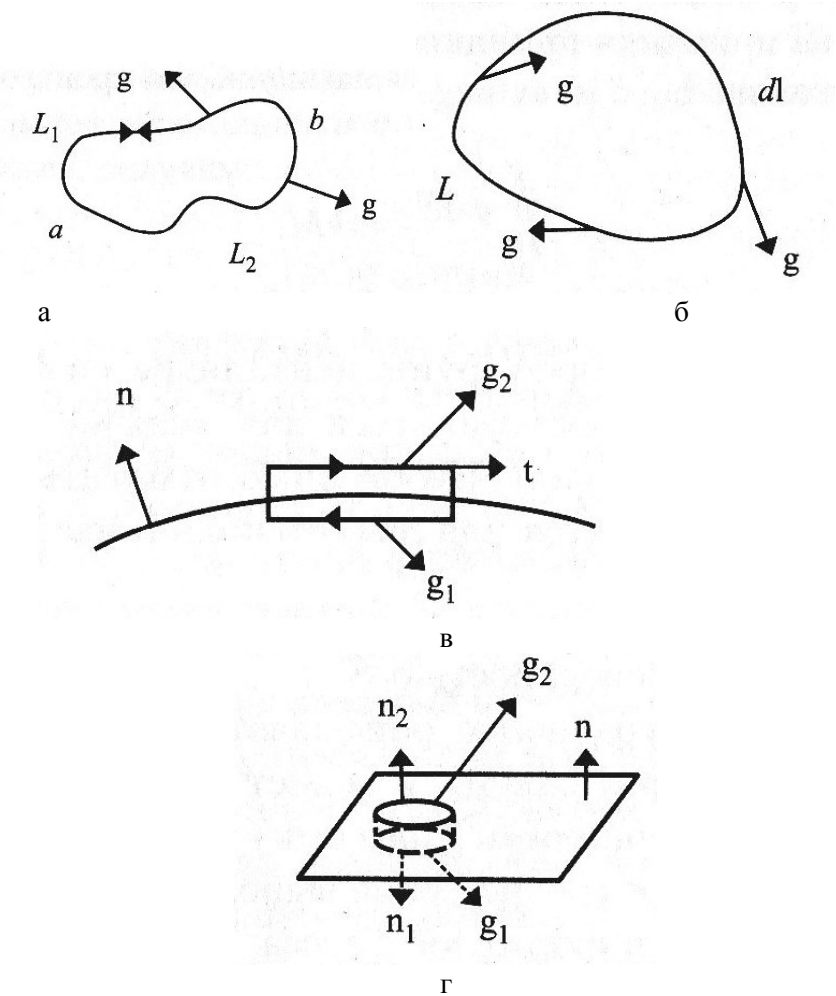


Рис . 3.5 . Ілюстрація системи рівнянь поля тяжіння
а, б - ілюстрація рівняння (3.21); в - тангенціальна компонента поля на межі; г - нормальна компонента поля на межі за [99]

$$\int_{L_1} \vec{g} d\vec{l} = \int_{L_2} \vec{g} d\vec{l}, \qquad (3.21)$$

де L_1 і L_2 – два довільних шляхи, що з'єднують одні й ті ж кінцеві точки (рис. 3.5, а).

Змінюючи напрям одного з цих шляхів, наприклад L_2, отримуємо:

$$\int_{L_1} \vec{g} d\vec{l} = -\int_{L_2} \vec{g} d\vec{l} \text{ або } \int_{L_1} \vec{g} d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{g} d\vec{l} = 0. \qquad (3.22)$$

Оскільки ці шляхи утворюють замкнутий шлях L, рівняння (3.21) може бути переписано як

$$\oint \vec{g}\, d\vec{l} = 0 \qquad (3.22)$$

тобто циркуляція поля тяжіння дорівнює нулю. Це означає, що силові лінії цього поля завжди відкриті, а їхні кінцеві точки розташовані або всередині мас, або на нескінченності.

Друга фундаментальна властивість поля $\vec{g}$ описується рівнянням (3.20), і воно полягає в тому, що потік цього поля через будь-яку замкнену поверхню характеризує кількість маси в об'ємі V, обмеженому цією поверхнею. Обидва рівняння – (3.20) і (3.23) – являють систему рівнянь поля тяжіння в інтегральній формі:

$$\oint_L \vec{g} d\vec{l} = 0 \text{ і } \oint_S g dS = -4\pi G m, \qquad (3.24)$$

тут m– повна маса в об'ємі V.

Оскільки ця система не містить похідних поля, вона виконується в будь-якій точці, включаючи межі середовищ з різною густиною.

Ці рівняння можуть розглядатися як зв'язки між значеннями поля $\vec{g}$ в різних точках простору, що розташовані на будь-якій відстані одна від одної, і, відповідно, вони є інтегральними рівняннями відносно поля $\vec{g}$.

Далі ми отримуємо систему рівнянь поля в диференціальній формі, тобто зв'язок між значеннями поля і густиною мас в околиці однієї і тієї ж точки.

Припустимо для початку, що ця точка регулярна і, таким чином, поле має перші похідні в цій точці. Використовуючи визначення ротора і дивергенції, ми отримаємо систему рівнянь в регулярних точках:

$rot\,\vec{g} = 0$,і $div\vec{g}$=$-4\pi G\delta$, (3.25)

де δ– об'ємна густина в точці, а в точках, де немає мас, $div\vec{g}$=0.

Обміркуємо фізичний і математичний зміст цих рівнянь. Перше рівняння ясно показує, що поле тяжіння не має вихорів і, відповідно, робота, що здійснюється цим полем, не залежить від шляху. Іншими словами, циркуляція поля дорівнює нулю. Водночас друге рівняння показує, що поле $\vec{g}$ створюється тільки джерелами (масами). Для ілюстрації розглянемо ці рівняння в декартовій системі координат:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix} = 0,\ \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} = -4\pi G\delta.$$

Відповідно, замість першого рівняння отримаємо:

$$\frac{\partial g_z}{\partial y} = \frac{\partial g_y}{\partial z},\quad \frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{\partial g_z}{\partial x},\quad \frac{\partial g_x}{\partial y} = \frac{\partial g_y}{\partial x}. \qquad (3.26)$$

Таким чином, ми маємо справу з системою з чотирьох диференційних рівнянь першого порядку і, взагалі кажучи, є чотири невідомі функції g_x, g_y, g_z і δ.

Якщо розподіл мас відомий, нам не потрібно використовувати систему (3.25), для того, щоб знайти поле. Дійсно, це завдання вирішується за допомогою інтегрування, використовуючи рівняння (3.1):

$$\vec{g}(A) = -G\int \delta(B)\frac{\vec{R}}{R^3}dV \qquad (3.27)$$

Як випливає з рівняння (3.27), існує зв'язок між різними компонентами поля, і він вказує на те, що кожна компонента поля містить одні й ті ж відомості про розподіл мас. Зауважимо, що рівняння (3.27) прямо випливає з рівняння 2.26). За визначенням, маємо:

$$g_x(A) = -G\int \frac{\delta(B)(x_A - x_b)}{R^3}dV,$$

$$g_y(A) = -G\int \frac{\delta(B)(y_A - y_b)}{R^3}dV,$$

$$g_z(A) = -G\int \frac{\delta(B)(z_A - z_b)}{R^3}dV.$$

Обчислюючи відповідні похідні, ми знову приходимо до рівнянь (3.27). Система (3.27) записана для точки, в якій густина визначена. Проте є винятки, наприклад, межа між середовищами з різною

густиною (рис. 3.5, в), оскільки в таких точках густина маси є розривної функцією. Скориставшись тепер рівнянням (3.24), легко вивести поверхневий аналог рівняння (3.25).

Обчислимо циркуляцію вздовж шляху, зображеного на (рис. 3.5, в. З рівняння (3.23) випливає:

$$\overrightarrow{g_2}d\vec{l}_2 + \overrightarrow{g_1}d\vec{l}_1 = 0, \qquad (3.28)$$

оскільки зміщення $d\vec{l}$ малі, інтеграли можуть бути замінені на скалярний добуток поля і зміщення, в той час як інтеграли по ділянках шляху h, якіперпендикулярні до поверхні, перетворюються в нуль, коли h прагне до нуля. Враховуючи, що

$$d\vec{l}_2 = -d\vec{l}_1,$$

отримуємо

$$g_{2t}dt - g_{1t}dt = 0 \text{ або } g_{1t} = g_{2t}, \qquad (3.29)$$

де g_t– тангенціальна компонента поля.

Рівняння (3.29) – це поверхневий аналог першого рівняння для поля тяжіння, і воно показує, що тангенціальна компонента $\vec{g}$ є безперервною функцією на межі середовищ з різними густинами. Далі уявимо собі елементарний циліндр навколо деякої точки B на цій поверхні (рис. 3.5, г). Тоді, застосовуючи рівняння (3.20), маємо:

$$\overrightarrow{g_2}dS_2 + \overrightarrow{g_1}dS_1 + \int_{S_1} \vec{g}\, d\vec{S} = -4\pi Gm,$$

де

$$dS_2 = dS\vec{n} \text{ і} dS_1 = -dS\vec{n}$$

а S– бокова поверхня циліндра, $\vec{n}$– одиничний вектор, спрямований від тилової сторони поверхні до зовнішньої.

На межі, коли висота циліндра прямує до нуля, маса m також перетворюється в нуль, і це дає

$$g_{2n} = g_{1m} \qquad (3.30)$$

Останнє рівняння – це поверхневий аналог другого рівняння поля. Таким чином, обидві компоненти неперервні на межі (рис. 3.5, г).

Як підсумок корисно проілюструвати перехід від Ньютонівського закону тяжіння до системи рівнянь за допомогою діаграми. Стрілки показують, що всі рівняння виводяться із закону тяжіння Ньютона, і в них не міститься більше інформації, ніж у цьому законі. Водночас розглянуте дозволяє нам краще зрозуміти

загальні властивості поля і часто дозволяє отримати деяке спрощення при вирішенні прямої та оберненої задач гравіметрії.

3.5. Рівняння Лапласа і Пуассона

Як говорилося вище, рівняння (3.25) – досить складна система диференціальних рівнянь, і було б природно спробувати замінити її набагато більш простими рівняннями. Це перший аргумент на користь введення потенціалу поля притягання. Скористаємося рівністю

$$rotgrad\ U = 0,$$

і перше рівняння системи (3.25) перетворюється на

$$\vec{g}(A) = grad\ U. \tag{3.31}$$

Таким чином, ми виразили векторне поле $\vec{g}$ через скалярну функцію $U(A)$за допомогою досить простої операції:

$$\vec{g}(A) = \frac{1}{h_1}\frac{\partial U}{\partial x_1}\overrightarrow{\imath_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}\overrightarrow{\imath_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}\overrightarrow{\imath_3}, \tag{3.32}$$

де–h_1, h_2, h_3,–метричні коефіцієнти, x_1, x_2, x_3,– координати точки спостереження, а $\overrightarrow{\imath_1}, \overrightarrow{\imath_2}$, $\overrightarrow{\imath_3}$– одиничні вектори системи координат. Наприклад для декартової системи координат $h_1 = h_2 = h_3 = 1$, а одиничні вектори збігаються з $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$. Відповідно,

$$gradU = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}.$$

Ясно, що рівняння (3.31) визначає потенціал U з точністю до сталої, оскільки $grad\ C = 0$, тобто одне і те ж поле $\vec{g}$ описується нескінченним числом потенціалів. Тому правильно розглядати потенціал як допоміжну функцію, що вводиться в основному для того, щоб спростити аналіз більш складного поля $\vec{g}$.

Наступний крок очевидний: необхідно знайти рівняння, що описує поведінку U. Щоб ввести потенціал, ми вже використали перше рівняння, $rot\vec{g} = 0$. Тепер, підставивши рівняння (3.30) в друге рівняння системи (3.22), отримаємо:

$$div\ gradU = -4\pi G\delta \quad \text{або} \quad \nabla^2 U = -4\pi G\delta. \tag{3.33}$$

Таким чином, ми отримали рівняння Пуассона і, як добре відомо, (3.31) може бути представлено в наступному вигляді:

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)\right.$$
$$\left.= -4\pi G\delta\right].$$

Водночас, поблизу точок, в яких немає мас (δ= 0), замість рівняння (3.31) ми одержимо рівняння Лапласа

$$\nabla^2 U = 0. \qquad (3.34)$$

І рівняння Пуассона, і рівняння Лапласа описують поведінку потенціалу в регулярних точках, в яких існують перші похідні поля сили тяжіння.

Щоб охарактеризувати поведінку потенціалу на межі середовищ з різними густинами, застосуємо рівняння (3.30), згідно з яким компонента поля вздовж якого-небудь напрямку l дорівнювала похідній потенціалу по цьому напрямку:

$$g_l = \frac{\partial U}{\partial l}. \qquad (3.35)$$

Таким чином, в якості аналога рівняння поля на поверхні ми отримаємо:

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = \frac{\partial U_1}{\partial t} \quad \text{і} \quad \frac{\partial U_2}{\partial n} = \frac{\partial U_1}{\partial n}, \qquad (3.36)$$

де U_1 іU_2– значення потенціалу на тиловій і зовнішній поверхні відповідно. Очевидно, що неперервність тангенціальних похідних потенціалу випливає з неперервності самого потенціалу, тому перше рівняння системи (3.34) може бути замінено на більш просте:

$$U_1 = U_2. \qquad (3.37)$$

Відзначимо, що рівняння нормальних похідних не випливає з неперервності потенціалу, оскільки нормальні похідні залежать також від значень потенціалу під і над поверхнею [99, 104]. Таким чином, поведінка потенціалу представляється системою рівнянь, що має вигляд:

$$\nabla^2 U = -4\pi G\delta \text{і}\ \ U_1 = U_2\ ;\ \frac{\partial U_2}{\partial n} = \frac{\partial U_1}{\partial n} \qquad (3.38)$$

Звичайно, система рівнянь поля притягання суттєво складніша за рівняння потенціалу. Тому необхідно зробити наступне зауваження. В усіх геофізичних методах поля, такі як зміщення частинок, що створюються пружними хвилями, сталі і змінні у часі електричні і магнітні поля, можуть бути виражені через скалярні або векторні потенціали (або через скалярні та векторні потенціали одночасно).

Відповідно, всі такі методи можуть бути названі потенціальними, і в цьому розумінні метод гравіметрії не є виключенням.

3.6. Потенціал та його зв'язок з масами

Встановимо зв'язок між потенціалом U та масами. Розглянемо спочатку елементарну масу $dm = \delta dV$.У відповідності з (3.4) маємо:

$$\vec{g}(A) = -G\frac{dm}{R^3}\vec{R} = Gdmgrad_A\frac{1}{R}, \quad (3.39)$$

оскільки

$$\frac{\vec{R}}{R^3} = -grad_A\frac{1}{R},$$

де індекс A означає, що градієнт розглядається поблизу точки A.

Порівнюючи (3.30) та (3.37), можна стверджувати, що функція U, що відповідає полю елементарної маси, що знаходиться в точці B, дорівнює

$$U(A) = G\frac{dm}{R} + C, \quad (3.40)$$

оскільки якщо градієнти двох функцій рівні, вони можуть відрізнятися лише на константу.

З урахуванням того, що поле $\vec{g}$, створюване масою dm, прямує до нуля на нескінченності, природно покласти, що потенціал також зникає при $R \to \infty$. Тоді з рівняння (3.40) слідує, що $C = 0$, і отримуємо:

$$U(A) = G\frac{dm}{R}. \quad (3.41)$$

В подальшому, застосовуючи принцип суперпозиції, отримаємо вираз для потенціалу, що створюється об'ємним розподілом мас:

$$U(A) = G\int_V \frac{\delta(B)dV}{R}. \quad (3.42)$$

З рівнянь (3.2) та (3.40) ясно видно, що потенціал пов'язаний з масами більш простими співвідношеннями, ніж поле $\vec{g}$, і це друга причина доцільності введення потенціалу. Нарівні з об'ємними масами можна ввести інші типи мас, в результаті отримаємо:

$$U(A) = G\left[\int_V \frac{\delta(B)}{R}dV + \int_S \frac{\sigma(B)}{R}dS + \int_V \frac{\lambda(B)}{R}dl + \sum_i \frac{m_i(B)}{R}\right], \quad (3.43)$$

де m_i – елементарна маса, а σ і λ – відповідно поверхнева та лінійна густини.

Корисно розглянути ще одне застосування потенціалу, для цього розглянемо зміну цієї функції dU, поблизу деякої точки. Як відомо,

$$dU = \frac{\partial U}{\partial l_1} dl_1 + \frac{\partial U}{\partial l_2} dl_2 + \frac{\partial U}{\partial l_3} dl_3, \quad (3.44)$$

де dl_1, dl_2, dl_3 – елементарні зміщення вздовж координатних ліній x_1, x_2 і x_3. Легко бачити, що права частина цього рівняння може бути переписана у виді скалярного добутку векторів:

$$d\vec{l} = dl_1\vec{\imath} + dl_2\vec{\jmath} + dl_1\vec{k}$$

і

$$gradU = \frac{\partial U}{\partial l_1}\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial l_2}\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial l_3}\vec{k}, \quad (3.45)$$

де $dl_1 = h_1 dx_1, dl_2 = h_2 dx_2, dl_3 = h_3 dx_3$.

Таким чином,

$$dU = d\vec{l} gradU = \vec{g} d\vec{l}. \quad (3.46)$$

Після інтегрування цього рівняння вздовж довільного шляху з кінцевими точками a і b отримаємо:

$$U(b) - U(a) = \int_a^b \vec{g} d\vec{l}. \quad (3.47)$$

Тобто інтеграл поля $\vec{g}$ вздовж шляху виражається у виді різниці значень потенціалу в кінцевих точках цього шляху. Звичайно, значно простіше обчислити різницю потенціалів в двох точках $U(b) - U(a)$, ніж здійснювати інтегрування, і цей факт показує, ще одну перевагу використання потенціалу.

3.7. Фундаментальні розв'язки рівнянь Пуассона та Лапласа

Знову розглянемо рівняння Пуассона та Лапласа, які описують поведінку потенціалу всередині та зовні мас. Раніше ми вже отримали вираз для потенціалу

$$U(A) = G \int_V \frac{\delta(B) dV}{R},$$

яке справедливе для будь-якої точки. Таким чином, ця функція є розв'язком рівняння Пуассона всередині масі задовольняє рівнянню Лапласа зовні мас. Якщо інтегрування виконується по всім масам, $U(A)$ представляє собою фундаментальний розв'язок цих рівнянь. Корисно показати другим способом, що $U(A)$ задовольняє цим

рівнянням. Наприклад, у випадку, коли точка спостереження знаходиться зовні мас, тобто $A \neq B$, ми маємо:

$$U(A) = G \int_V \delta(B) \nabla_A^2 \frac{1}{R} dV,$$

де

$$\nabla_A^2 U(A) = \frac{\partial^2}{\partial x_A^2}\frac{1}{R} + \frac{\partial^2}{\partial y_A^2}\frac{1}{R} + \frac{\partial^2}{\partial z_A^2}\frac{1}{R}$$

та

$$R^{-1} = [(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2]^{-1/2}.$$

Беручи першу та другу похідні, знаходимо:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_A^2}\frac{1}{R} = -\frac{1}{R^3} + 3(x_A - x_B)^2 \frac{1}{R^5};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y_A^2}\frac{1}{R} = -\frac{1}{R^3} + 3(y_A - y_B)^2 \frac{1}{R^5};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_A^2}\frac{1}{R} = -\frac{1}{R^3} + 3(z_A - x_B)^2 \frac{1}{R^5},$$

тобто

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = 0$$

і відповідно, лапсасіан потенціалу дорівнює нулю, там, де $A \neq B$.

Аналогічно, але враховуючи вплив мас, в околиці точки B, пізніше покажемо, що $U(A)$ задовольняє рівнянню Пуассона всередині мас.

За визначенням, лапсасіан U є дивергенцією поля притягання, і відповідно, його величина характеризує густину мас в цій же точці. Виникає наступне питання: що говорить нам лапсасіан про поведінку потенціалу?

Для відповіді на це питання розглянемо для початку найпростіший випадок, коли U залежить від одного аргументу x (рис. 3.6, а). Тоді ми можемо представити похідні в вигляді

$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{1}{\Delta x}\left[U\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - U\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)\right]$$

та

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial U\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\partial x} - \frac{\partial U\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)}{\partial x}\right]. \qquad (3.48)$$

Оскільки

$$\frac{dU\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{dx}=\frac{1}{\Delta x}[U(x+\Delta x)-U(x)]$$

$$\frac{dU\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)}{dx}=\frac{1}{\Delta x}[U(x)-U(x-\Delta x)],$$

отримуємо:

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2}=\frac{1}{\Delta x^2}[U(x+\Delta x)+U(x-\Delta x)-2U(x)] \qquad (3.49)$$

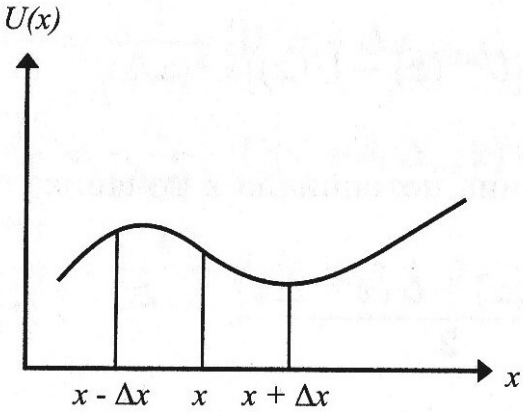
або

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2}=\frac{2}{(\Delta x)^2}[U^{av}(x)-U(x)]. \qquad (3.50)$$

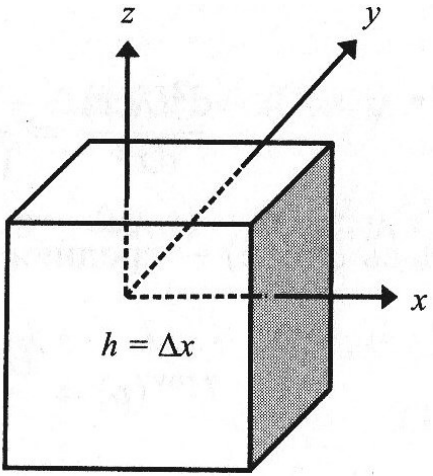
В останньому рівнянні $U^{av}(x)$ – середня величина потенціалу в точці A:

$$U^{av}(A)=\frac{U(x+\Delta x)+U(x-\Delta x)}{2}. \qquad (3.51)$$

Таким чином, перша похідна визначає швидкість зміни функції $U(x)$, тоді як друга похідна показує, наскільки її середня величина відрізняється від значення цієї функції в тій же точці.



а



б

Рис. 3.6. Ілюстрація розв'язку рівнянь Пуассона та Лапласа
а – ілюстрація рівняння (3.51), б – елементарний куб навколо точки x, y, z за [99]

Наприклад, якщо $U''(x) < 0$, то маємо $U(x) > U^{av}(x)$ та має місце максимум. Припустимо надалі, що в деякому окресті x середнє значення функції співпадає в кожній точці зі значенням цієї функції

$$U^{av}(x) = U(x), \tag{3.52}$$

і значить

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 0. \tag{3.53}$$

Останнє рівняння представляє найпростіший клас функцій в одновимірному випадку, а саме лінійні функції, для яких виконується рівність (3.51).

Відповідно, можна сказати, що друга похідна – міра того, наскільки функція відрізняється від лінійної в охресті деякої точки. Іншими словами, друга похідна характеризує кривизну лінії, що описує функцію.

Для того, щоб узагальнити цей аналіз для тривимірного випадку, уявимо собі елементарний куб в охресті деякої точки $A(x, y, z)$, сторони якого направлені вздовж координатних осей (рис. 3.6, б). Довжина кожної сторони дорівнює $2h$. У відповідності з рівнянням (3.48) другі похідні вздовж координатних осей дорівнюють

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x^2}[U(x+\Delta x, y, z) + U(x-\Delta x, y, z) - 2U(x, y, z)],$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta y^2}[U(x, y+\Delta y, z) + U(x, y-\Delta y, z) - 2U(x, y, z)], \qquad (3.54)$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{\Delta z^2}[U(x, y, z+\Delta z) + U(x, y, z-\Delta z) - 2U(x, y, z)]$$

З урахуванням того, що $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$, та підставивши рівняння (3.52) у вираз для лапсасіана

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \nabla^2 U,$$

отримаємо

$$\nabla^2 U = \frac{1}{h^2}\left[\sum_{i=1}^{6} U_i - 6U(A)\right],$$

або

$$\nabla^2 U = \frac{1}{h^2}\left[\sum_{i=1}^{6} U_i/6 - U(A)\right]. \qquad (3.55)$$

В наведеному рівнянні U_i – величина потенціалу на i-тій стороні куба, а $U(A)$ – його величина в центрі куба. Очевидно, що член $\sum_{i=1}^{6} U_i/6$ представляє собою середнє значення потенціалу в точці A. Тому лапласіан може бути записаний у вигляді

$$\nabla^2 U = \frac{1}{h^2}[U^{av}(A) - U(A)], \qquad (3.56)$$

тобто він знову є мірою різниці між середнім значенням функції U та її середнім значенням в тій же точці. Наприклад, якщо середнє значення перебільшує значення функції, то лапласіан додатній. У випадку гравітаційного поля лапласіан завжди від'ємний, тобто $U(A) > U^{av}(A)$, що слідує з того, що права частина рівняння (3.31) від'ємна, якщо $\delta \neq 0$. Використовуючи рівняння (3.54), отримаємо просту форму рівняння Лапласа:

$$U^{av}(A) - U(A) = 0. \qquad (3.57)$$

Таким чином, якщо функція U задовольняє рівнянню Лапласа, вона володіє цікавою властивістю, а саме її середнє значення, що обчислене в охресті деякої точки A, в точності співпадає зі значенням функції в цій же точці. Тільки визначений клас функцій володіє цією властивістю, і ці функції називаються гармонічними. Відповідно, можна стверджувати, що потенціал поля притягання – гармонічна функція поза масами. У відповідності з рівнянням Лапласа, сума других похідних вздовж координатних осей x, y, zдорівнює нулю за умови, що $U(A)$гармонічна функція. В той

же час відомо, що в одномірному випадку існує клас функцій, для яких друга похідна дорівнює нулю, тобто

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 0.$$

З цього порівняння поведінки других похідних слідує, що природно розглядати гармонічні функції як аналог лінійних функцій і очікувати, що їм притаманні подібні властивості. Наведемо деякі з цих властивостей.

1. Зрозуміло, що якщо значення лінійної функції відомі в кінцевих точках деякого інтервалу по x, їх можна обчислити. І в будь-якій точці всередині інтервалу. Аналогічно, якщо гармонічна функція задана в кожній точці граничної поверхні деякого об'єму, її значення можуть бути визначені в кожній точці об'єму.

2. Якщо лінійна функція має рівні значення в кінцевих точках інтервалу, то вона має ті ж значення і всередині інтервалу, тобто лінійна функція стала. Аналогічно, якщо гармонічна функція має одне й те ж саме значення в усіх точках граничної поверхні, то це ж значення буде у неї і в будь-якій точці всередині об'єму.

Природно, обидва твердження можуть бути доведені за допомогою теореми єдності поля притягання. Зробимо ще одне зауваження: лінійна функція досягає максимуму в кінцевій точці інтервалу. Ця ж властивість спостерігається й у випадку гармонічних функцій: вони не можуть мати екстремуму всередині об'єму. В протилежному випадку, середнє значення функції в деякій точці не співпадало б зі значенням самої функції в цій точці і, відповідно, лапласіан відрізнявся б від нуля. В той же час можуть існувати сідлові точки.

3.8. Теорема єдності і розв'язок прямої задачі

Припустимо, що розподіл мас всюди відомий. Тоді, як було показано раніше, потенціал поля має вид

$$U(A) = G\int_V \frac{\delta(B)}{R}dV, \tag{3.58}$$

і в регулярних точках ця функція задовольняє рівнянню Пуассона:

$$\Delta U = -4\pi G\delta. \tag{3.59}$$

Крім того потенціал і його перші похідні неперервні на межах, де об'ємна густина зазнає розриву. Очевидно, що в цьому випадку розв'язок прямої задачі єдиний. Розглянемо тепер зовсім іншу ситуацію, коли $\delta(B)$ задана лише всередині деякого об'єму V, який обмежений поверхнею S (рис. 3.7, а).

Оскільки розподіл мас зовні V невідомий, природно очікувати, що рівняння Пуассона визначає потенціал не єдиним чином, і для ілюстрації цього факту представимо його розв'язок у виді суми:

$$U(A) = U_i(A) + U_o(A), \tag{3.60}$$

де $U_i(A)$ та $U_o(A)$ – потенціали в об'ємі V, що створюються відповідно масами всередині і зовні V:

$$U_i(A) = -4\pi G\delta \text{ і } U_o(A) = 0. \tag{3.61}$$

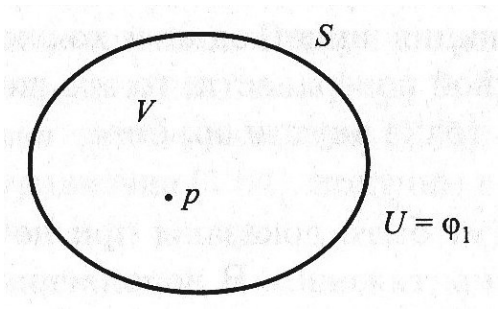
Тоді можна записати:

$$\Delta U = \Delta(U_i + U_o) = \Delta U_i + \Delta U_o = -4\pi G\delta. \tag{3.62}$$

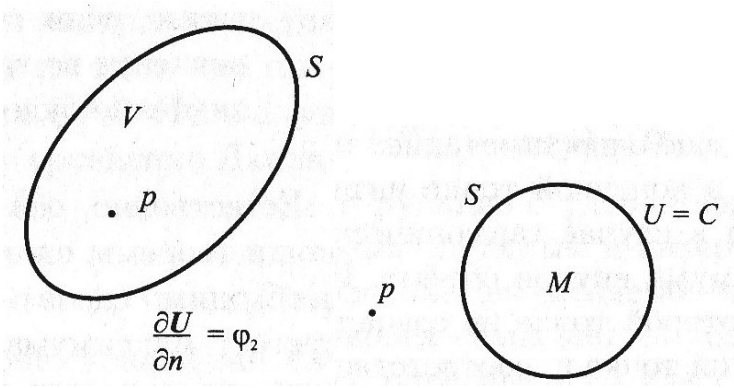
Це значить, що рівняння Пуассона визначає потенціал з точністю до гармонічної функції U_o. Незалежно від розподілу мас зовні об'єму потенціал U_o залишається гармонічною функцією всередині V, і, відповідно, існує нескінченне число потенціалів, які задовольняють рівнянню (3.62), всі вони можуть бути представлені у виді

$$U(A) = G\int_V \frac{\delta dV}{R} + U_o(A), \tag{3.63}$$

де останній член в правій частині невідомий.



а



б в

Рис. 3.7 Вирішення прямої задачі, коли $\delta(B)$ задана лише всередині деякого об'єму V, який обмежений поверхнею S
а – задача Діріхле, б – задача Неймана, в – крайова задача третього роду

Зрозуміло, що крім рівняння Пуассона нам необхідна додаткова інформація, яка дозволить нам знайти гармонічну функцію $U_o(A)$. Виявляється, що поведінка потенціалу на межі S дає цю інформацію, яка називається граничними умовами. По суті, граничні умови вміщують дані про розподіл мас зовні об'єму V. Для того, щоб знайти ці умови, будемо виходити з теореми Гауса, яка слугує природним зв'язком між значеннями поля всередині об'єму та на межі:

$$\int_V div\vec{X}\ dV = \oint_S \vec{X}\cdot\vec{n}dS = \oint_S X_n dS, \qquad (3.64)$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор, перпендикулярний поверхні S та спрямований зовні, X_n – нормальна компонента довільного векторного поля $\vec{X}$, неперервного в об'ємі V.

Як згадувалося раніше, рівняння (3.57) має нескінченну кількість розв'язків, виберемо будь-яку пару з них $U_1(A)$ і $U_2(A)$і запишемо їхню різницю:

$$U_3(A) = U_2(A) - U_1(A). \qquad (3.65)$$

Для виводу граничних умов введемо векторну функцію $\vec{X}(A)$:

$$\vec{X} = U_3 grad U_3 = U_3\nabla U_3. \qquad (3.66)$$

Підстановка (2,64) в рівняння (3.62) дає:

$$\int_V \nabla(U_3 \nabla U_3)\, dV = \oint_S U_3 \nabla_n U_3 dS, \qquad (3.67)$$

де $U_3 \nabla_n$ – компонента градієнта вздовж нормалі $\vec{n}$, тобто

$$U_3 \nabla_n = \frac{\partial U_3}{\partial n}. \qquad (3.68)$$

Оскільки ∇ – диференціальний оператор, маємо:

$$\nabla(U_3 \nabla U_3) = U_3 \nabla^2 U_3 + \nabla U_3 \nabla U_3 = \left(\nabla {U_3}^2\right), \qquad (3.69)$$

оскільки

$$\nabla^2 U_3 = \Delta U_3 = \Delta(U_2 - U_1) = -4\pi G\delta + 4\pi G\delta = 0.$$

З врахуванням рівнянь (3.66) і (3.67), можна переписати рівняння (3.65) у виді

$$\int_V \nabla(U_3)^2\, dV = \oint_S U_3 \frac{\partial U_3}{\partial n} dS. \qquad (3.70)$$

Ця рівність є частковим видом теореми Гауса, що дозволить нам знайти декілька межових умов, що забезпечують єдність розв'язку прямої задачі.

Зробимо спочатку три зауваження:

- об'єм V може бути обмеженим декількома поверхнями;
- підінтегральний вираз об'ємного інтегралу в рівнянні (3.68) невід'ємний, цей факт відіграє дуже важливу роль при виведенні граничних умов;
- рівняння (3.59) зв'язує значення функції всередині об'єму V зі значеннями на поверхні границіS, і гармонічна функція U_3 – різниця двох довільних розв'язків рівнянь Пуассона.

Тепер ми готові сформулювати граничні умови для потенціалу поля притягання, які єдиним чином визначають це поле всередині об'єму V. Для цього припустимо, що поверхневий інтеграл в правій частині рівняння (1.76) дорівнює нулю. Тоді

$$\int_V (\nabla U_3)^2 = 0, \qquad (3.71)$$

Та з врахуванням того, що підінтегральний вираз не може бути від'ємним, необхідно, щоб в кожній точці об'єму

$$grad U_3 = 0. \qquad (3.72)$$

Це значить, що похідна функції U_3 за будь-яким напрямком l дорівнює нулю:

$$\frac{\partial u_3}{\partial l} = 0,$$

тобто функція стала, тому похідні розв'язків рівнянь Пуассона дорівнюють одне одному:

$$\frac{\partial U_1(A)}{\partial l} = \frac{\partial U_2(A)}{\partial l}.$$

Іншими словами, якщо поверхневий інтеграл в рівнянні (3.68) перетворюється в нуль, ці розв'язки можуть відрізнятися лише на сталу:

$$U_2(A) = U_1(A) + C, \qquad (3.73)$$

де C – стала, тобто функція, що приймає одне і те ж значення в об'ємі V включаючи його поверхню. Також ця стала може бути нулем. Далі ми визначимо умови, за яких поверхневий інтеграл зникає:

$$\oint_S U_3 \frac{\partial U_3}{\partial n} dS = 0 \qquad (3.74)$$

і, відповідно, рівняння (3.71) стає справедливим. Деякі з цих умов описані нижче.

3.8.1.Крайова задача першого роду

Припустимо, що потенціал $U(A)$відомий на граничній поверхні, тобто

$$U(A) = \emptyset_1(A) \text{ на } S, \qquad (3.75)$$

і ми розглядаємо розв'язок рівняння Пуассона, що задовольняє рівняння (3.73). припустимо, що існують два різних розв'язки цього рівняння всередині об'єму $U_1(A)$ та $U_2(A)$, які співпадають на граничній поверхні:

$$U_1(A) = U_2(A) = \emptyset_1(A) \text{ на } S.$$

Тоді їх різниця $U_3(A)$ на цій поверхні перетворюється в нуль:

$$U_3(A) = 0 \text{ на } S$$

і, відповідно, поверхневий інтеграл в рівнянні (3.72) теж перетворюється в нуль. Тоді, в відповідності з рівнянням (3.71), розв'язки рівняння Пуассона, що задовольняють умові (3.73), можуть відрізнятися один від одного тільки на сталу. Більш того, ця стала відома і дорівнює нулю, оскільки на поверхні S всі розв'язки мають співпадати. Іншими словами, ми довели, що рівняння

$$\Delta U = -4\pi G\delta \text{ всередині } V$$

і

$$U(A) = \emptyset(A) \text{ на } S \qquad (3.76)$$

Визначають потенціал U єдиним чином, а поле притягання $\vec{g}$ також єдине, оскільки

$$\vec{g} = gradU.$$

Рівняння (3.76) описує крайову задачу Діріхле, яка може бути внутрішньою або зовнішньою (рис. 3.7, а) і має декілька важливих застосувань в теорії гравітаційного поля Землі. Необхідно відзначити, що в відповідності з рівнянням (3.73) можна сказати, що компонента поля g_t також відома вздовж будь-якого напрямку, що дотичний до граничної поверхні, оскільки $g_t = \frac{\partial V}{\partial t}$. Відповідно, крайова задача може бути переписана у виді:

$$rot\vec{g} = 0 \qquad div\vec{g} = -4\pi G\delta$$

і

$$g_t = \frac{\partial \emptyset_1}{\partial t} \text{на } S \tag{3.77}$$

Цей перший випадок ілюструє важливість граничної умови. Дійсно, рівняння Пуассона або система рівнянь поля мають нескінченне число розв'язків, що відповідають різним розподілам мас, які розташовані зовні об'єму, що розглядається. Звичайно, можна уявити необмежену кількість варіантів розподілу мас і очікувати нескінченне число різних полів всередині об'єму V. Іншими словами, рівняння Пуассона, або точніше, заданий розподіл густини в об'ємі V, дозволяє знайти потенціал, що створюється цими масами, тоді як граничні умови (3.73) еквівалентні знанню про розподіл мас, розташованих зовні об'єму. Ясно, що якщо маси в об'ємі Vвідсутні, то потенціал U буде гармонічною функцією, що однозначно визначається з умов Діріхле.

3.8.2.Крайова задача другого роду

Припустимо, що два довільних розв'язки рівняння Пуассона в об'ємі V, U_1(A) і U_2(A) мають однакві нормальні похідні по поверхні S, тобто

$$\frac{\partial U_1}{\partial n} = \frac{\partial U_2}{\partial n} = \emptyset_2(A) \text{ на } S, \tag{3.78}$$

де $\emptyset_2(A)$ - відома функція.

З цього рівняння безперечно слідує, що нормальна похідна різниці цих розв'язків зникає на граничній поверхні:

$$\frac{\partial U_3}{\partial n} = 0 \text{ на } S.$$

Таким чином, поверхневий потенціал в рівнянні (3.68) як і в попередньому випадку, дорівнює нулеві і, відповідно, всередині об'єму ми маємо:

$$\nabla U_3 = 0.$$

Це значить, що будь-які розв'язки рівняння Пуассона, наприклад, $V_1(\mathrm{A})$ і $V_2(\mathrm{A})$ можуть відрізнятися один від одного в кожній точці об'єму V тільки на сталу, якщо їх нормальні похідні співпадають на граничній поверхні S.Тому ця крайова задача визначає поле притягання також єдиним чином і може бути записана як:

$$\nabla U_3 = -4\pi G\ \delta \text{ (всередині } V).$$

і

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \emptyset_2(A) \text{ на } S \tag{3.79}$$

або

$$rot\ \vec{g} = 0, div\ \vec{g} = -\ 4\pi G\ \delta$$

і

$$g_n = \emptyset_2(A) \text{на } S \tag{3.80}$$

та називається задачею Неймана.

На відміну від попереднього випадку рівняння (3.77) визначає потенціал з точністю до константи, а поле притягання визначається, звичайно, однозначно.

3.8.3.Крайова задача третього роду

Припустимо, що гранична поверхня *S* еквіпотенціальна, тобто

$$U\ \ (\mathrm{A}) = C$$

на граничній поверхні *S,* а *C* – деяка стала. В додаток до цього припускається, що відома повна маса в об'ємі *V*, який обмежений поверхнею *S* (рис. 3.7, с). Як слідує з теореми Гауса,

$$\oint_S\ \vec{g}\, d\vec{S} = \oint_S\ g_n\, ds = \oint_S\ \frac{\partial V}{\partial n} dS = -4\pi GM. \tag{3.81}$$

Це значить, що

$$\oint_S\ U_3 \frac{\partial U}{\partial n} dS = \emptyset_3,$$

де відома $\emptyset_3 = -4\pi GM$.

Покажемо, що розв'язки рівняння Пуассона, $U_1(\mathrm{A})$ і $U_2(\mathrm{A})$, що задовольняють рівнянням (3.79) і (3.80), можуть відрізнятися на сталу.

Розглянемо поверхневий інтеграл в рівнянні (3.68):

$$\oint_S U_3 \frac{\partial U_3}{\partial n} dS.$$

Оскільки гранична поверхня еквіпотенціальна для обох потенціалів U_1 і U_2, їх різниця також стала на цій поверхні, і відповідно, можна записати:

$$\oint_S U_3 \frac{\partial U_3}{\partial n} dS = U_3 \oint_S \frac{\partial U_3}{\partial n} dS = U_3 \left\{ \oint_s \frac{\partial U_2}{\partial n} dS - \oint_s \frac{\partial U_1}{\partial n} dS \right\} = 0,$$

і у відповідності з рівнянням (3.68) всередині об'єму ми маємо:

$$\nabla U_3 = 0 \quad \text{або} \quad U_2(A) = U_1(A) + C.$$

Таким чином, крайові умови (3.78) і (3.79) визначають потенціал всередині об'єму *V* з точністю до деякої сталої. Відповідно, крайова задача третього роду може бути сформульована наступним чином:

1. Всередині об'єму потенціал задовольняє рівнянню Пуассона:

$$\nabla U = -4\pi G\delta.$$

2. На рівневій поверхні *S*, що обмежує об'єм, маємо:

$$\oint \frac{\partial U}{\partial n} dS = \emptyset_3, \tag{3.82}$$

де $\emptyset_3$задана і прямо пропорційна повній масі всередині об'єму. Якщо поверхня *S*включає також деякі поверхні, що віднесені на нескінченність, на яких потенціал прямує до нуля; тоді потенціал може бути визначений єдиним чином. Для поля маємо:

$$rot\vec{g} = 0 \qquad div\vec{g} = -4\pi G\delta$$

і

$$\oint_S g_n dS = \emptyset_3, \tag{3.83}$$

де g_n – нормальна компонента поля, та її величина співпадає з величиною повного поля, оскільки дотична компонента зникає на еквіпотенціальній поверхні.

Ця крайова задача відіграє фундаментальну роль в теорії гравітації. Щоб підтвердити цей факт, припустимо, що відомі форма рівневої поверхні *S* , що оточує Землю, і маса Землі. В той же час маси зовні поверхні *S* відсутні. Тоді розрахунки для крайової задачі третього роду показують, що ці дві умови одозначно визначають потенціал і відповідне поле. Іншими словами, незалежно від розподілу мас Землі її зовнішнє поле залишається сталим. Тому можна використовувати поле та його потенціал для вивчення фігури

Землі. Єдиність розв'язку цієї крайової задачі була доведена Стоксом і називається задачею Стокса. Доцільні наступні два зауваження:

1. Поле, що спостерігається зовні цієї рівневої поверхні, не дозволяє визначити розподіл мас, якщо відома тільки повна маса M;
2. Єдиність розв'язку задачі Стокса доводиться у випадку, коли відсутні маси зовні рівневої поверхні S; проте, як було доведено, ця умова не обов'язково і, навіть, за присутності мас потік поля через поверхню S визначається тільки масами всередині неї.

3.8.4.Крайова задача четвертого роду

Припустимо, що в об'ємі *V* потенціал задовольняє рівнянню Пуассона

$$\Delta U = -4\pi G\delta$$

і в точках поверхні S відома лінійна комбінація потенціалу U та його нормальної похідної $\partial U/_{\partial n}$:

$$p\frac{\partial U}{\partial n} + hU = m, \qquad (3.84)$$

де p і h – додатні сталі, або функції точки:

$$p > 0 \text{ і } h = 0. \qquad (3.85)$$

Якщо U_1і U_2 є розв'язками рівняння Пуассона і задовольняють граничним умовам (3.82), їх різниця $U_3 = U_2 - U_1$задовільняє рівнянню Лапласа та наступній умові на поверхні S:

$$p\frac{\partial U_3}{\partial n} + hU_3 = 0.$$

Помноживши останнє рівняння на U_3, отримаємо:

$$pU_3\frac{\partial U_3}{\partial n} \leq -hU_3^2. \qquad (3.86)$$

Розглянемо тепер знову рівняння (3.68). Його ліва частина може бути тільки нулем або додатною тоді, як слідує з рівняння (3.84), вона від'ємна або нульова. Таким чином, рівняння (3.68) справедливо тільки тоді, якщо обидва інтеграли дорівнюють нулю і, відповідно, в усьому об'ємі *V* ми маємо:

$$grad\ U_3 = 0,$$

тобто два розв'язки цієї кураєвої задачі можуть відрізнятися тільки на сталу величину. Якщо об'єм *V* обмежений деякою поверхнею на

нескінченності, де потенціал прямує до нуля, ця стала перетворюється в нуль.

Відзначимо, що ця крайова задача відіграє важливу роль при виводі формули Стокса, яка дозволяє отримати положення геоїда ар відношенню до нормального (референц) еліпсоїду.

Можна сформулювати такі основні підсумки розділу:

1. Було сформульовано чотири типи граничних умов, для кожного з яких поле притягання в об'ємі V визначається однозначно.
2. Доведено, що об'єм може бути обмежений декількома поверхнями, і в кожній точці на них повинна бути задана одна з цих умов. Наприклад, потенціал може бути заданий на одній поверхні, а його нормальна похідна – на іншій.
3. Процедура визначення наведених умов, що заснована на застосуванні теореми Гаусса, називається теоремою єдності.
4. Крайова задача може бути як зовнішньою, так і внутрішньою, кожна гранична умова однаково може бути застосована в обох випадках.

3.9.Формула Гріна і співвідношення між потенціалом і граничними умовами

По суті, теорема єдності формулює кроки, які необхідно виконати для знаходження поля притягання та його потенціалу. Ці кроки – наступні:

1. Розв'язок рівняння Пуассона.
2. Вибір серед розв'язків таких функцій, що задовольняють граничним умовам.

В той же час слід відзначити, що в сучасних числових методах розв'язку крайових задач, які базуються на заміні диференціальних рівнянь кінцевими різницями, ці кроки виконуються одночасно.

У відповідності з теоремою єдності поле всередині об'єму V визначається розподілом мас всередині цього об'єму та граничними умовами, відповідно, звичайно можна вивести рівняння, що встановлює цей зв'язок.

З цією метою будемо спиратися на теорему Гаусса:

$$\int_{\nabla} \nabla\vec{X}dV = \oint \vec{X}d\vec{S}, \qquad (3.87)$$

припускаючи, що векторна функція $\vec{X}$(B) та її перші похідні існують в об'ємі *V*. Тут $\nabla\vec{X}$ – дивергенція векторного поля $\vec{X}$.

Визначимо вектор $\vec{X}$ за допомогою скалярних функцій φ(B) і ψ(B) наступним чином:

$$\vec{X} = \varphi(B)\,\nabla\,\psi(B, A) - \psi(B, A)\,\nabla\,\varphi(B). \qquad (3.88)$$

В останньому рівнянні φі ψ – неперервні функції з неперервними першою та другою похідними, *A* – точка спостереження, в якій визначається потенціал, а *B* – довільна точка.

Підставляючи рівняння (3.88) в (3.87) і враховуючи те, що

$$\vec{X}\,d\vec{S} = X_n dS = \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dS \text{ та}$$

$$div\,\vec{X} = \nabla\varphi\nabla\psi + \varphi\nabla^2\psi - \nabla\varphi\nabla\psi - \psi\nabla^2\varphi = \varphi\,\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi,$$

отримаємо:

$$\int_{\nabla}(\varphi\,\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi)\,dV = \oint_S\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\vec{S}. \qquad (3.89)$$

Це відношення називається другою формулою Гріна, воно є наслідком теореми Гаусса у випадку, коли вектор $\vec{X}$ задається рівнянням (3.88). Частково, поклавши ψ=const, отримаємо першу формулу Гріна:

$$\int_{\nabla}\nabla^2\varphi\,dV = \oint_S\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS. \qquad (3.90)$$

Згадувалося раніше, наша мета полягає в тому, щоб виразити потенціал поля *U(A)* в об'ємі *V*через маси всередині об'єму та значення потенціалу та його похідних на границі *S* ($S = S_1+S_2$, (рис. 3.8). Для розв'язку цієї задачі скористаємося рівнянням (3.89), припустивши, що функція φ описує потенціал *U* , а функція ψ=G(B, A) підпорядковується наступним умовам:

а)вона є роз'язком рівняння Лапласа

$$\nabla^2 G = 0 \qquad (3.91)$$

скрізь, крім точки спостережень;

б) при наближенні до точки *A* ця функція прямує до нескінченності як

$$G(B, A) \to \frac{1}{R} \text{ при } R \to 0, \qquad (3.92)$$

тут *R* - відстань між точками *B* і *A*.

Відзначимо, що *G(B, A)*називається функцією Гріна. Існує нескінченне число таких функцій, і всі вони мають сингулярність в точці спостереження *A*. Оскільки друга формула Гріна була

виведена в припущенні, що функції UіGне мають сингулярностей в об'ємі V, ми не можемо прямо використовувати цю функцію Gв рівнянні (3.87). Щоб уникнути цих труднощів, окреслимо точку A невеликою сферичною поверхнею S^* і застосуємо рівняння (3.87) до об'єму, що обмежений поверхнями S та S^*, як показано на (рис. 3.8.

В подальшому нас, в основному, будуть цікавити випадки, коли в об'ємі V немає мас, тобто

$$\Delta V=0. \qquad (3.93)$$

З урахуванням рівнянь (1.99) та (1.101) об'ємний інтеграл у другій формулі Гріна дорівнює нулю, і тоді отримаємо:

$$\oint_S \left(U\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial U}{\partial n}\right) dS + \oint_{S^*} \left(U\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial U}{\partial n}\right) dS = 0. \qquad (3.94)$$

Виходячи з цього рівняння, виведемо явний вираз для потенціалу U. Це значить, що нам доведеться винести функцію Uза знак цього інтегралу. Для цього розглянемо медове значення другого інтегралу, коли радіус серединної поверхні rпрямує до нуля. Оскільки як потенціал, так і його похідна неперервні в об'ємі, отримуємо:

$$U(B) \to U(A) \text{та} \frac{\partial U(B)}{\partial n} \to \frac{\partial U(A)}{\partial n}.$$

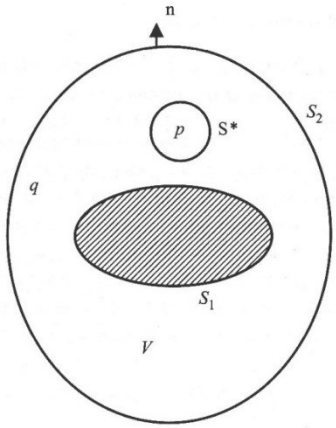


Рис. 3.8. Ілюстрація рівняння (3.94)

Тобто функції $U(B)$та $\frac{\partial U(B)}{\partial n}$ на поверхні S^* наближаються до своїх значень в точці спостереження. Також, як видно на (рис. 3.8,

нормаль $\vec{n}$ і радіус-вектор $\vec{r}$ на цій поверхні мають протилежні один одному напрямки, і тому для точок на цій поверхні ми маємо:

$$G \to \frac{1}{R} = \frac{1}{r} \text{ і } \frac{\partial G}{\partial n} \to \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \quad \text{при } r \to 0.$$

Тоді, застосовуючи теорему про середнє, поверхневий інтервал навколо точки спостереження може біти представлено у вигляді:

$$\oint_{S^*} \left\{ U(B)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\frac{\partial U(B)}{\partial n} \right\} dS =$$

$$= \frac{1}{r^2}\oint_{S^*} U(B)dS - \frac{1}{r}\oint_{S^*} \frac{\partial U(B)}{\partial n}\, dS. \qquad (3.95)$$

Члени рівняння в правій частині дорівнюють один одному

$$\frac{1}{r^2}\oint_{S^*} U(B)dS = \frac{U(A)}{r^2}4\pi r^2 = 4\pi\, U(A)$$

і

$$\frac{1}{r}\oint_{S^*} \frac{\partial U(B)}{\partial n}dS = \frac{1}{r}\frac{\partial U(A)}{\partial n}4\pi r^2 \to 0.$$

Таким чином, інтеграл по поверхні S^* на межі дорівнює:

$$\oint_{S^*} \left(U(B)(\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial U(B)}{\partial n} \right) dS = 4\pi\, U(A). \qquad (3.96)$$

Це самий важливий результат розрахунків, оскільки він дозволяє отримати вираз для потенціалу в будь-якій точці об'єму через значення на границі. Підстановка (3.96) в (3.94) дає:

$$U(A) = \frac{1}{4\pi}\oint_S \left\{ G(B,A)\frac{\partial U(B)}{\partial n} - U(B)\frac{\partial G(B,A)}{\partial n} \right\} dS. \qquad (3.97)$$

В останньому рівнянні B – точка на граничній поверхні, A – точка спостереження.

Таким чином, щоб визначити потенціал, необхідно знати як потенціал, так і його нормальну похідну на поверхні S. В той же час, як слідує з крайових задач першого і другого роду, для визначення потенціалу досить знайти тільки одну з цих величин на поверхні S. Це уявне протиріччя може бути легко вирішено належним вибором функції Гріна, що буде показано надалі.

Спочатку ми припускали, що в об'ємі V немає мас і, відповідно, рівняння (1.105) описує потенціал поля притягання, який створений масами, розташованими зовні об'єму V. Припустимо тепер, що в

цьому об'ємі є маси та їх розподіл характеризується густиною δ. Тоді, застосовуючи принцип суперпозиції, отримаємо:

$$U(A) = G\int_V \frac{\delta(B)}{R}dV + \frac{1}{4\pi}\oint_S \left\{G(B,A)\frac{\partial U(B)}{\partial n} - U(B)\frac{\partial G(B,A)}{\partial n}\right\}dS. \qquad (3.98)$$

3.10.Аналітичне продовження поля в верхній напівпростір

Розглянемо як приклад застосування рівняння

$$U(A) = \frac{1}{4\pi}\oint_S \left\{G(B,A)\frac{\partial U(B)}{\partial n} - U(B)\frac{\partial G(B,A)}{\partial n}\right\}dS \qquad (3.99)$$

для розрахунку поля в верхньому напівпросторі (рис. 3.9).

Відзначимо, що ця процедура іноді застосовується для зменшення геологічного шуму. Беремо до уваги, що в верхньому напівпросторі (над поверхнєю Землі S_0) відсутні маси, потенціал задовольняє рівнянню Лапласа $\Delta U = 0$.

Припустимо, що на площині S_0відома вертикальна компонента поля притягання, тобто похідна $\frac{\partial U}{\partial n}$. Оскільки ми розглядаємо поле, що створено масою обмеженого тіла, на досить значних відстанях від S_0 поле стає малим і, відповідно, можна припустити, що потенціал Uпрямує до нуля на на півсфері з нескінченно великим радіусом (r→ ∞). Оскільки $g_z = \frac{\partial U}{\partial z}$, рівняння (3.97) приймає вигляд:

$$U(A) = \frac{1}{4\pi}\oint_{S_0} \left\{G(B,A)g_z - U(B)\frac{\partial G(B,A)}{\partial z}\right\}dS + \frac{1}{4\pi}\oint_{S_r} \left\{G(B,A)g_r - U(B)\frac{\partial G(B,A)}{\partial r}\right\}dS,$$

де вісь zнаправлена вниз, а g_r – нормальна компонента поля на сферичній поверхні радіуса r.

Далі ми припустимо, що зі збільшенням радіуса rнапівсферичної поверхні функція Gзменшується, як і потенціал, в крайньому випадку обернено пропорційно до r, а їх похідні $\frac{\partial U}{\partial r}$ та $\frac{\partial G}{\partial r}$ прямують до нуля як r^{-2}. Відповідно, підінтегральний вираз у другому інтегралі зменшуєтьсяякr^{-3} і, використовуючи теорему про середнє, отримуємо:

$$\frac{1}{4\pi}\oint_{S_r}\left\{G(B,A)g_r - U(B)\frac{\partial G(B,A)}{\partial r}\right\}dS \to \frac{C}{r^3}\oint_{S_r} dS = \frac{C}{r^3}4\pi r^2 \to$$

0при r→ ∞,

де C – деяка стала.

Таким чином, вираз для потенціалу має вигляд:

$$U(A) = \frac{1}{4\pi}\oint_{S_0}\left\{G(B,A)g_z - U(B)\frac{\partial G(B,A)}{\partial z_B}\right\}dS. \quad (3.100)$$

Ця формула для обчислення потенціалу поля в будь-якому місці верхнього напівпростору, якщо потенціал і вертикальна компонента поля притягання відомі на поверхні Землі S_0 .

Беручи похідну від обох частин рівняння (3.98), отримаємо вертикальну компоненту поля притягання в точці A:

$$g_z(A) = \frac{1}{4\pi}\oint_{S_0}\left\{g_z(B)\frac{\partial G}{\partial z_B} - U(B)\frac{\partial^2 G}{\partial z_A z_B}\right\}dS, \quad (3.101)$$

де z_A і z_B – позначають, що похідні функції Гріна беруться по координаті z в околицях точок A і B відповідно. Як вже було показано, існує нескінченне число функцій Гріна. Найпростіша з них:

$$G(B,A) = \frac{1}{R}. \quad (3.102)$$

Дійсно, вона задовольняє рівнянню Лапласа скрізь крім точки А, оскільки вона з точністю до сталого множника описує потенціал точкової маси, що розташована в точці A. Вона також має особливість в цій точці та забезпечує нульове значення поверхневого інтегралу на напівсфері, коли її радіус r прямує до нескінченності. Відповідно, можна записати:

$$g_z(A) = \frac{1}{4\pi}\oint_{S_0}\left\{g_z(B)\frac{\partial}{\partial z_B}\frac{1}{R} - U(B)\frac{\partial^2}{\partial z_A z_B}\frac{1}{R}\right\}dS. \quad (3.103)$$

Проте, цей вираз непридатний до використання, оскільки потенціал Uнеможливо виміряти на поверхні Землі. Тому доводиться вибирати таку функцію Гріна, що похідна $\frac{\partial G}{\partial z}$ перетворюється в нуль на поверхні Землі. В цьому випадку рівняння (3.98) значно спрощується:

$$U(A) = \frac{1}{4\pi}\oint_{S_0}\{G(B,A)g_z(\mathrm{B})\}\,dS, \quad (3.104)$$

де $g_z(\mathrm{B})$ – виміряна компонента поля на поверхні Землі, а $G(B,A)$ – невідома функція, що задовольняє наступним умовам:

1. У верхньому напівпросторі (z>)функція Гріна є розв’язком рівняння Лапласа скрізь крім точки спостереження А.

2. Вона має особливість виду $\frac{1}{R}$, тобто при наближенні до точки А

$$G(B,A) \to \frac{1}{R}.$$

3. На напівсфері вона зменшується зі збільшенням rв крайньому випадку як $\frac{1}{r}$.

4. На поверхні Землі похідна $\frac{\partial G\ (\mathrm{B,A})}{\partial z_B}$ перетворюється в нуль:

$$\frac{\partial G}{\partial z_B} = 0.$$

В таких випадках визначення функції $G(B,A)$, що задовольняє всім цим умовам, представляє собою розв'язок крайової задачі, і у відповідності з теоремою єдиності ці умови однозначно визначають функцію $G(B,A)$. Загалом, розв'язок цієї проблеми може бути складним, але є і винятки, наприклад, важливий випадок плоскої поверхні S_0, для якої знайти функцію Гріна досить просто.

Введемо точку S , яка є дзеркальним відображенням точки А по відношенню до площини земної поверхні(рис. 1.10) та розглянемо функцію $G_1(B,A,S)$, яка дорівнює

$$G_1(B,A,S) = \frac{1}{R_{BA}} + \frac{1}{R_{BS}}, \qquad (3.105)$$

де B – точка на земній поверхні, а

$$R_{BA} = [(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2]^{\frac{1}{2}},$$
$$R_{BS} = [(x_B - x_S)^2 + (y_B - y_S)^2 + (z_B - z_S)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

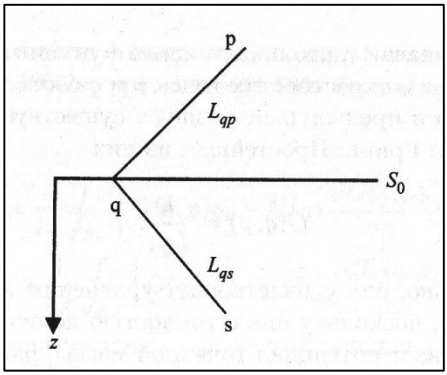


Рис. 3.9 Ілюстрація рівняння (3.103)

Обчислюючи похідну $\frac{\partial G_1}{\partial z_B}$, отримаємо:

$$\frac{\partial G_1}{\partial z_B} = -\frac{z_B - z_A}{R_{BA}^3} - \frac{z_B - z_S}{R_{BS}^3}.$$

Оскільки в кожній точці земної поверхні

$$z_B = 0 \text{ та } z_A = -z_S, \text{ а } R_{BA} = R_{BS},$$

похідна $\frac{\partial G_1}{\partial z_B}$ дорівнює нулю. Очевидно, що інші умови також виконуються. Тому в відповідності до рівняння (3.102) ми отримуємо для потенціалу та для вертикальної компоненти поля притягання в точці А:

$$U(A) = \frac{1}{4\pi}\oint_{S_0}\{G_1 g_z(\text{B})\}\,dS \quad \text{і} \quad g_z(A) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\oint_{S_0}\left\{g_z(B)\frac{\partial G_1}{\partial z_B}\right\}dS, \tag{3.106}$$

де

$$\frac{\partial G_1}{\partial z_B} = \frac{z_A}{R^3}.$$

Рівняння (3.104) дозволяє обчислити вертикальну компоненту поля у верхньому напівпросторі, якщо вона відома на поверхні Землі. Відповідно, це перетворення називають аналітичним продовженням у верхній на півпростір, і воно використовується для зменшення впливу геологічного шуму, що викликається неоднорідностями відносно малих розмірів.

3.11.Інтеграл Пуассона

Встановимо співвідношення між потенціалом *U(A)*в будь-якій точці *A*об'єму *V* та його значеннями на сферичній поверхні, що оточує всі маси (рис. 3.10).

Ця задача відіграє фундаментальну роль в теоремі Стокса, яка дозволяє визначити перевищення геоїда по відношенню до нормального (референц) еліпсоїда.

Знову звернемося до формули Гріна:

$$U(A) = \frac{1}{4\pi}\oint_S \left\{G(B,A)\frac{\partial U(B)}{\partial n} - U(B)\frac{\partial G(B,A)}{\partial n}\right\}dS. \tag{3.107}$$

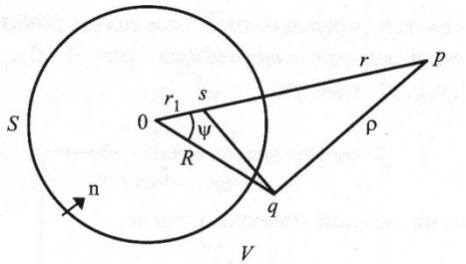


Рис. 3.10 Ілюстрація рівняння (3.107)

В цьому випадку одиничний вектор $\vec{n}$ і радіус-вектор $\vec{R}$ мають протилежні напрямки. Об'єм *V*обмежений поверхнею *S* і сферичною поверхнею нескінченно великого радіуса. При виводі цього рівняння ми припускаємо, що потенціал *U(A)* – гранична функція, а функція Гріна обирається таким чином, щоб можна було знехтувати другим інтегралом по поверхні, коли її радіус прямує до нескінченності. Підінтегральний вираз в (3.105) вміщує як потенціал, так і його похідні на сферичній поверхні *S*. Для розв'язку задачі необхідно знайти функцію Гріна в об'ємі *V*, яка була б рівна нулю в кожній точці межової поверхні *S*:

$$G = 0\,. \tag{3.108}$$

Тоді отримаємо:

$$U(A) = -\frac{1}{4\pi}\oint_S U(B)\frac{\partial G}{\partial n}dS. \tag{3.109}$$

У випадку плоскої медової поверхні ми представили функцію Гріна як суму потенціалів, що створюються точковими масами, розташованими в точках *B* і s, які є дзеркальним відображенням одне одного відносно площини *S*.По аналогії представимо функцію Гріна у виді різниці:

$$G\ \ (A,B,s) = \frac{1}{\rho} - \alpha\frac{1}{sB}. \tag{3.110}$$

Тут *s* – точка, що розташована де-небудь всередині сфери на лінії *OA*, ρ і *sB* – відстані між точками *B, A* і *s*–відповідно, а α – стала. Покажемо тепер, що для кожної точки спостереження А можна знайти таку точку s і коефіцієнт α, що формула Гріна буде дорівнювати нулю в усіх точках сфери.

Щоб це довести, оберемо спочатку положення точки s відповідно наступній умові:

$$r\, r_1 = R^2, \tag{3.111}$$

Тобто добуток відстаней від точок *A* і *B* до початку координат *O* дорівнює квадрату радіуса сфери. Наприклад, зі збільшенням відстані *r*точка *s*наближається до початку координат. Навпаки, коли точка А наближається до межі, точка *s* також рухається до цієї поверхні.

Далі розглянемо два трикутники *sOB* і *sOA*, що зображені на (рис. 3.10. Вони мають спільний кут ψ і сторони, що утворюють цей кут, пропорційні. Дійсно, з рівняння (3.109) маємо:

$$\frac{r}{R} = \frac{R}{r_1} \tag{3.112}$$

Таким чином, ці трикутники подібні, і маємо:

$$\frac{sB}{\rho} = \frac{r_1}{R} \text{ або } \frac{1}{sB} = \frac{R}{\rho r_1}.$$

З врахуванням рівняння (3.110) останній вираз представляється у виді:

$$\frac{1}{sB} = \frac{R}{\rho}\frac{r}{R^2} = \frac{r}{\rho R},$$

і рівняння (3.108-2.110) дають:

$$\alpha = \frac{r_1}{R},$$

і для точок в об'ємі V на поверхні Sмаємо:

$$G\ \ (A, B, s) = \frac{1}{\rho} - \frac{r_1}{R}\frac{1}{sB}. \tag{3.113}$$

Тут

$$\rho = (r^2 + R^2 - \ 2\, rR\cos\psi)^{\frac{1}{2}},\ \ sB = (r_1{}^2 + R^2 - \ 2\, r_1 R\cos\psi)^{\frac{1}{2}}.$$

Підстановка рівняння (3.113) в (3.109) дає:

$$U(A) = -\frac{1}{4\pi}\oint_S\ U(B)\frac{\partial}{\partial n}\ (\frac{1}{\rho} - \frac{r_1}{R}\frac{1}{sB})\, dS. \tag{3.114}$$

Спочатку обчислимо похідні ρ^{-1} та $(sB)^{-1}$:

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{\rho} = -\frac{\partial}{\partial R}\frac{1}{\rho} = \frac{R\ -\ r\cos\psi}{\rho^3} \text{ і } \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{\rho} = -\frac{\partial}{\partial R}\frac{1}{\mathrm{sB}} = \frac{R\ -\ r_1\cos\psi}{(\mathrm{sB})^3}.$$

Тому

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{R\ -\ r\cos\psi}{\rho^3} - \frac{r_1}{R}\,(R\ -\ r_1\cos\psi)\frac{R^3}{r_1^3\rho^3} = \frac{1}{\rho^3}\left[\left(R\ -\ r\cos\psi\right)r_1^2 - (R\ -\ r_1\cos\psi)\,R^2\right]\frac{1}{r_1^2} =$$

$$= \frac{r^2}{R^4\,\rho^3}\left[\left(R \quad - \quad r\cos\psi\right)\frac{R^4}{r^2} - \left(R \quad - \quad \frac{R^2}{r}\cos\psi\right)R^2\right] =$$

$$= \frac{1}{R^2\,\rho^3}\left[R^3 - r\,R^2\cos\psi - Rr^2 + R^2 r\cos\psi\right] = \frac{1}{R\ \ \rho^3}\left(R^2 - \ r^2\right).$$

Таким чином, рівняння (3.107) приймає вигляд:

$$U(A) = -\frac{1}{4\pi R}\oint_S \ U(B)\frac{R^2 - \ r^2}{\rho^3}dS = \frac{R^2 - \ r^2}{4\pi R}\oint_S \ U(B)\frac{dS}{\rho^3}, \qquad (3.115)$$

і ми знайшли формулу, яка дозволяє визначити потенціал в об'ємі *V* за умови, що він відомий на поверхні *S*, тобто задача Діріхле вирішена.

3.12.Поведінка поля притягання

Розглянемо тепер поле притягання, що створюється різними розподілами мас та розглянемо найпростіший випадок.

3.12.1.Поле притягання сферичної маси

Нехай є однорідна сфера радіусу *a*. Приймаючи до уваги сферичну симетрію розподілу мас, природно перейти в сферичну систему координат з початком в центрі сфери (рис. 3.14, б). Тоді вектор $\vec{g}(A)$ можна охарактеризувати трьома компонентами:

$$g_R,\ g_\theta, g_\varphi.$$

За визначенням, будь-яка площина $\theta = const$є площиною симетрії. Іншими словами завжди знайдуться дві елементарні маси, що рівні одна одній і розташовані на протилежних сторонах цієї площини, але на рівних відстанях. Як можна бачити з (рис. 3.14, г, сума θ-компонент, що створюються цими двома масами, дорівнює нулю. Представляючи повну масу, як суму подібних пар, приходимо до висновку, що θ-компонента g_θ, що створена сферичною масою, відсутня в кожній точці всередині та зовні тіла.

Таким же чином можна довести, що g_φ= 0. Звичайно, цей факт може бути доведений і інтегруванням по об'єму в рівнянні (3.2), проте цей спосіб набагато складніший.

Таким чином, поле притягання має тільки радіальну компоненту g_R, і це поле направлено до початку координат *O*. Щоб визначити

цю компоненту, будемо виходити з рівняння (3.18) та розглянемо сферичну поверхню радіусу R, як показано на (рис. 3.14, в. Оскільки $d\vec{S} = dS\vec{\imath}_R$ та скалярна компонента g_R - стала в точках сферичної поверхні, ми отримаємо потік:

$$\int_S \vec{g}\, d\,\vec{S} = g_R \int_S d\,\vec{S} = 4\pi R^2 g_R = -4\pi GM.$$

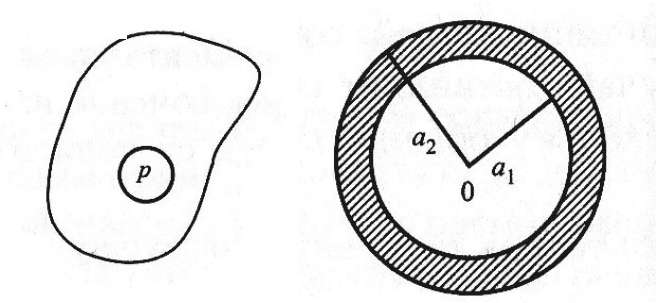
Таким чином, поле притягання g_R^0зовні сфери дорівнює

$$g_R^0 = -G\frac{M}{R^2}, \text{ якщо } R \gg a, \qquad (3.116)$$

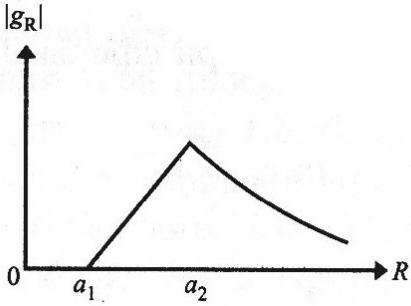
тоді як всередині сфери ми отримуємо

$$g_R^i = -G\frac{m}{R^2}, \text{ якщо } R \ll a. \qquad (3.117)$$

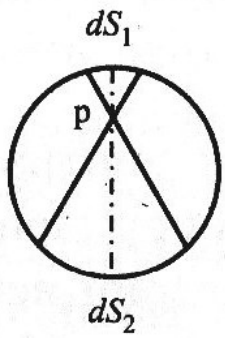
Тут m – маса, обмежена поверхнею інтегрування S. Як слідує з рівняння (3.116), зовнішнє поле співпадає з полем, що створюється точковим джерелом тієї ж маси M, що розташоване в центрі сфери. Це добре відомий результат, який важко було б передбачити.

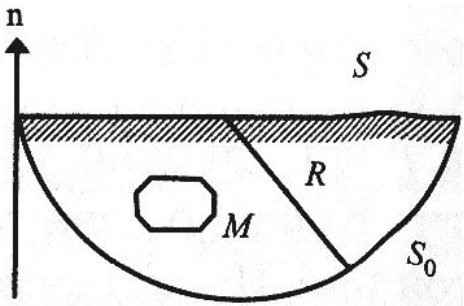


а б



в





г д

Рис. 3.14 Ілюстрація поведінки поля притягання зв [99]
а- поле притягання і його потенціал всередині маси, б – сферична оболонка кінцевої товщини, в – поле притягання, що викликано масою оболонки, г – поле всередині оболонки, д – ілюстрація рівняння (1.135)

Дійсно, подібна поведінка спостерігається незалежно від того, наскільки близько точка спостереження знаходиться до сфери, та є результатом суперпозиції полів, що створюються елементарними масами. Цей випадок складає свого роду виняток з загального правила, оскільки звичайно поле відрізняється від поля точкової маси.

Розглянемо тепер поле всередині сфери. Оскільки

$$m = \frac{4\pi}{3} G\delta R^3,$$

отримаємо

$$g_R^i = -\frac{4\pi}{3} G\delta R, \qquad (3.118)$$

І величина поля лінійно збільшується від центра сфери до її поверхні. Звичайно, вона не обернено пропорційна квадрату відстані! Внаслідок сферичної симетрії зрозуміло, що поле зникає в центрі O. Як слідує з рівняння (3.116), маси, що розташовані в інтервалі $O-R$, створюють таке ж поле, як і точкова маса в початку координат, в той час як маси між a і R не впливають на поле. Іншими словами, сумарне поле елементарних мас в цьому інтервалі дорівнює нулю. Ця властивість радіальної компоненти як функції R проілюстрована на (рис. 3.14, е).

Відзначимо, що як на поверхні сфери, так і в інших точках поле неперервне. Зокрема, якщо $R = a$, рівняння (3.117) та (3.118) дають:

$$g_R^0 = -\frac{4\pi}{3} G\delta a = g_R^i.$$

Звичайно, рівняння (3.117) та (3.118) можуть бути безпосередньо виведені з рівняння (3.2), але це вимагало б доволі громіздкого інтегрування. Цей приклад дозволяє також проілюструвати той факт, що поле притягання має кінцеві значення всередині будь-якої маси. Для цього представимо, що точка спостереження A розташована в центрі малої та однорідної сфери (рис. 3.11, а). Тоді повне поле може бути представлено у виді суми:

$$\vec{g}(A) = \vec{g}^i(A) + \vec{g}^o(A),$$

де $\vec{g}^i(A)$ та $\vec{g}^o(A)$ – поля, створювані відповідно масами всередині та зовні малої сфери. Оскільки поле $\vec{g}^i$ дорівнює нулю, а джерела поля $\vec{g}^o$ розташовані на малій (незначній), але кінцевій відстані від точки A, можна прийти до висновку, що поле $\vec{g}(A)$ має кінцеве значення всередині мас. Корисно також знайти вираз для потенціалу такого поля. Оскільки функція U зникає на нескінченності, почнемо розгляд із зовнішнього середовища $R > a$. Як слідує з рівняння (3.45),

$$U(R) = -\int_R^{-\infty} G\frac{M}{R^2} dR = G\frac{M}{R}, \qquad R \geq a,$$

і, як і очікувалося, потенціал співпадає з потенціалом точкової маси. Зокрема, на поверхні сфери маємо:

$$U(A) = G\frac{4\pi}{3}\delta a^2,$$

оскільки сфера однорідна. Тепер, знаючи потенціал на поверхні, легко знайти його всередині сфери. Знову застосовуючи рівняння (3.45), отримаємо:

$$U(R) - U(a) = \int_a^R \vec{g}^i d\vec{R} = \frac{4\pi\delta}{3} G \int_a^R R dR = \frac{2\pi\delta}{3} G(a^2 - R^2).$$

Тому

$$U(R) = \frac{2\pi G\delta}{3}(3a^2 - R^2) \quad \text{при} \quad R \leq a.$$

Таким чином, потенціал досягає максимуму в центрі сфери та спадає як параболічна функція. Зовні сфери спостерігається зовсім інша поведінка. Ця проста задача дозволяє знову продемонструвати, що потенціал підкорюється рівнянню Пуассона. Розглянемо потенціал в точці A довільного тіла (рис. 3.11, а), припускаючи, що густина може змінюватися від точки до точки. Умовно проведемо сферичну поверхню навколо точки A. Якщо її радіус досить малий, можна вважати цю сферу однорідною. Потенціал в точці A може бути записаний у виді:

$$U(A) = U^i(A) + U^o(A),$$

де $U^i(A)$ та $U^o(A)$ – потенціали, що створюються відповідно масами всередині та зовні сфери. Оскільки потенціал залежить тільки від координати R, отримуємо:

$$\Delta U = \Delta U^i(A) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial U^i}{\partial R}\right) = -4\pi G\delta.$$

Підставляючи вираз для потенціалу U^i, що отриманий вище, бачимо, що воно є розв’язком рівняння Пуассона. Іншими словами, інтеграл

$$U(A) = G \int_V \frac{\delta(B) dV}{R}$$

задовольняє рівнянню Пуассона всередині мас, і це справедливо для довільного розподілу густини. Відзначимо також, що перший приклад в деякій мірі корисний при вивченні нормального притягання Землі. Розглянемо наступний приклад.

3.12.2.Поле притягання тонкого сферичного шару

Застосовуючи знову формулу Гауса та скориставшись сферичною системою координат, знаходимо, що всередині

оболонки $R < a_1$поле відсутнє, тоді як зовні оболонки $R > a_2$ воно поводить себе як поле точкового джерела, що розташоване в початку координат. Таким чином маємо:

$$g_R^i = 0 \text{ при} R < a_1 \text{ і } g_R^o = -G\frac{M}{R^2} \text{ при } R > a_2 \quad (3.119)$$

Видно, що підсумовування полів елементарних мас зовні оболонки дає той же результат, що і у випадку точкового джерела, що розташоване в центрі оболонки. Це другий приклад такої еквівалентності, і це знову виняток із загального правила. Розглянемо сферичну поверхню S радіуса $R = a_1 + r < a_2$. Тоді радіальна компонента всередині сфери дорівнює

$$g_R = -G\frac{m}{R^2}, \quad (3.120)$$

де m – маса, розташована всередині об'єму, обмеженого поверхнею S. Поклавши, що товщина оболонки $h = a_2 - a_1$мала в порівнянні з a_1, можна представити масу у виді

$$m = 4\pi R^2 r\delta.$$

Відповідно, замість рівняння (3.120) отримаємо

$$g_R = -4\pi G\delta r. \quad (3.121)$$

Поведінка g_R як функції від R показана на (рис. 3.11, в, і звичайно, це неперервна функція. Будемо тепер зменшувати товщину h і збільшувати об'ємну густину так, щоб маса залишалася сталою. Таким шляхом ми прийдемо до розподілу мас з поверхневою густиною, і ця зміна не змінює поле зовні оболонки, проте веде до розривності поля на поверхні мас. Покажемо, чому поле всередині оболонки ($R < a_1$) дорівнює нулю. Виберемо будь-яку точку A (рис. 3.11, г) і сформуємо елементарний конус з вершиною у цій точці. Зовнішня поверхня конуса перетинає оболонку і утворює всередині неї дві елементарні поверхні dS_1 і dS_2. За визначенням маємо:

$$dS_1 = \omega R_1^2 \text{ і} dS_2 = \omega R_2^2,$$

де ω – тілесний кут, обмежений конусом. Таким чином, поля, що створюються елементарними масами цих поверхонь, дорівнюють

$$g_R^{(1)} = -G\frac{m}{R_1^2} = -G\delta\omega, \quad g_R^{(2)} = G\frac{m}{R_2^2} = G\delta\omega,$$

І вони компенсують одне одного. Оскільки оболонка може бути представлена як множина таких пар, видно, що повне поле всередині оболонки дорівнює нулю. Відзначимо, що потенціал сталий всередині оболонки, а зовні неї поводить себе як потенціал

точкового джерела. Очевидно, що його еквіпотенціальні поверхні сферичні та їх центри співпадають з початком координат O.

3.12.3. Оцінка маси довільного тіла

Припустимо, що ми знаємо поле в точках на деякій площині і що воно створене довільним тілом, що розташоване під цією поверхнею спостереження. Припустимо також, що поле g_z (рис. 3.11, д) зникає на віддалі від тіла. Нижня частина простору – об'єм, в якому розташовані всі джерела, він обмежений площиною спостереження *S*і напівсферичною поверхнею S_0 відносно більшого радіусу, на якій поле може розглядатися як поле точкового джерела. Відповідно, потік через поверхню S_0 дорівнює:

$$\int_{S_0} \vec{g}\, d\,\vec{S} = -GM\frac{1}{R^2}\int_{S_0} d\,\vec{S} = -2\pi GM.$$

Тому потік через замкнену поверхню, що обмежує цей об'єм, виражається через поверхневий інтеграл по поверхні спостереження. Таким чином, маємо:

$$\oint \vec{g}\, d\,\vec{S} = -\int_S g_z dS - 2\pi GM = -4\pi GM \qquad (3.122)$$

оскільки в площині спостережень

$$\vec{g}\, d\,\vec{S} = -g_z dS.$$

В останньому рівнянні g_z – величина вертикальної компоненти поля на поверхні S. Таким чином, ми знайшли масу, яка створює поле, і вона дорівнює:

$$M = \frac{1}{2\pi G}\int_S g_z dS. \qquad (3.123)$$

3.12.4. Нормальна компонента поля притягання, що створена плоскими поверхневими масами

Припустимо, що маси розподілені в плоскому шарі, товщина якого набагато менша відстані від цих мас до точки спостереження (рис. 1.13, а). Іншими словами, відстані між точкою спостереження і будь-якою точкою елементарного об'єму практично співпадають. З урахуванням цього можна замінити цей шар плоскою поверхнею з

цією ж масою, що розташована десь в середині шару (рис. 3.12, б). Оскільки кожний елементарний об'єм вміщує масу

$$dm = \delta(B)\, hdS,$$

її розподіл по поверхні може бути описаний виразом

$$dm = \sigma(B)\, dS,$$

де

$$\sigma(B) = \delta(B)\, h, \qquad (3.124)$$

та $\sigma(B)$ – поверхнева густина мас.

Звичайно, кожний елемент поверхні S має таку ж масу, як і відповідний елементарний об'єм шару. Наступний крок полягає в знаходженні поля, створеного цими поверхневими масами. Насамперед, слід розрізняти верхню і нижню сторони поверхні Sіоберемо напрямок нормалі $\vec{n}(B)$ в кожній точці поверхні від нижньої до верхньої сторони. Поле, що створене елементарною масою на поверхні dS, дорівнює:

$$d\vec{g}(A) = -\,G\frac{dn}{R^3}\vec{R} = -\,G\frac{\sigma dS}{R^3}\vec{R} \qquad (3.125)$$

В кожній точці нижче і вище мас поле може бути представлено у вигляді суми тангенціальної і нормальної його компонент:

$$\vec{g}(A) = g_t\vec{t} + g_n\vec{n}, \qquad (3.126)$$

де $\vec{t}$ і $\vec{n}$, - відповідно дотичний і нормальний до площини вектори. Як видно на (рис. 3.12, б, нормальна компонента поля, що створюється елементарною масою, в кожній точці А дорівнює:

$$dg_n = \vec{n}d\vec{g} = -\,G\frac{\sigma dS}{R^3}\vec{R}\vec{n}. \qquad (3.127)$$

Далі припустимо, що всі маси розподілені однорідно, тобто σ=const. Застосовуючи принцип суперпозиції, отримуємо нормальну компоненту поля, що створюється поверхневими масами:

$$g_n(A) = -\,\sigma G\frac{\vec{R}d\vec{S}}{R^3}, \qquad (3.128)$$

оскільки $d\vec{S} = dS\vec{n}$.

Використовуючи той факт, що $\vec{R}_{AB} = -\vec{R}_{BA}$та $R_{AB}^3 = R_{BA}^3$ для нормальної компоненти обираємо:

$$g_n(A) = \sigma G\int_S \frac{\vec{R}d\vec{S}}{R^3}. \qquad (3.128)$$

Підінтегральний вираз описує тілесний кут, під яким ми бачимо елементарну ділянку поверхні з точки А. Відповідно, інтеграл в

правій частині цього рівняння характеризує тілесний кут для всієї поверхні:

$$\omega(A) = \int_S \frac{\vec{R}d\vec{S}}{R^3}. \quad (3.129)$$

Таким чином, нормальна компонента поля притягання, що створюється рівномірно розподіленими по плоскій поверхні масами, може бути виражена як:

$$g_n(A) = \sigma G\omega(A). \quad (3.130)$$

В загальному випадку, коли густина нестала, з рівняння (3.127) слідує:

$$g_n(A) = G\int_S \sigma(B)d\omega(B,A). \quad (3.131)$$

Розглянемо поведінку нормальної компоненти g_n для деяких випадків.

Необмежена плоска поверхня

Тілесний кут, під яким площина видна з нижньої і верхньої сторони, не залежить від точки А і дорівнює, відповідно, ±2π. Іншими словами, рівномірно розділені на нескінченній поверхні маси створюють однорідне поле в обох на півпросторах:

g_z= - 2 $\pi\sigma$G, якщо z>0 та g_z= 2 $\pi\sigma$G, якщо z<0.

Тут маси розташовані на площині z=0, а вісь z направлена вздовж вектора нормалі$\vec{n}$. Видно, що незалежно від відстані до площини поле залишається одним й тим самим. Це може бути пояснено на якісному рівні наступним чином. Поле $g_n(A)$ є сумою нормальних компонент, що створюються всіма елементарними масами поверхні. Якщо точка А розташована надто близько до поверхні z=0, то найближчий елемент вносить основний внесок, оскільки він є видимим під тілесним кутом, який майже співпадає з ±2π (рис. 3.12, в). В той же час кути для інших елементів занадто малі і, відповідно, їхні внески в цю компоненту поля малі так, що ними можна знехтувати. Зі збільшенням відстані від площини поле, що створене першим елементом, зменшується, але вплив більш віддалених елементів стає більшим.

Як було показано вище, ці два ефекти компенсують один одного, і поле не залежить від z. Цей результат буде використовуватися надалі при вивченні поля всередині і зовні шару кінцевої товщини. З рівняння (3.120) слідує, що

$$g^+ - g^- = -4\pi\sigma G. \quad (3.132)$$

де g^{+}і g^{-} - величини поля над і під поверхнею. Цей розрив виникає внаслідок заміни об'ємних мас поверхневими. Оскільки будь-яка площина, яка є перпендикулярною до площини розподілу мас, є площиною симетрії, тангенціально компонента g_tдорівнює нулю. Це означає, що завжди можна знайти дів однакові елементарні маси, що розташовані на однаковій відстані від площини симетрії.

Ясно, що їх нормальні компоненти мають однаковий напрямок, а тангенціальні – мають однакову величину, але протилежні один одному і, відповідно, їх сума дорівнює нулю.

Плоска поверхня кінцевої протяжності

Розглянемо поведінку g_z вздовж трьох профілів, перпендикулярних площині z=0 (рис. 3.12, г). Перший профіль перетинає маси на цій площині, та зі збільшенням відстані до них тілесний кут стає менше. Тому нормальна компонента поля спадає. З іншої сторони, при наближенні до поверхні тілесний кут наближається до свої межових значень: -2π та 2π, відповідно, зверху або знизу поверхні. Істотно, що поблизу плоскої поверхні компонента g_nвизначається тільки елементарною масою, що розташована поблизу точки спостереження. Лінійні розміри цього елемента повинні значно переважати координату z точки А.

Другий профіль проходить через область, в якій маси відсутні. Якщо точка спостереження розташована всередині цієї області, нормальна компонента зникає, оскільки поле, що створюється кожною елементарною масою, має в цьому випадку тільки тангенціальну компоненту. Цей же результат слідує з того, що тілесний кут, під яким поверхня видна з будь-якої точки області на площині, де маси відсутні, дорівнює нулю.

Таким чином, зі збільшенням відстані від z величина g_z зростає і досягає максимуму, а потім починає поступово спадати (зменшуватися).

Поведінка нормальної компоненти вздовж третього профілю співпадає з тільки що розглянутим випадком.

3.13. Функції Лежандра та розв'язок рівняння Лапласа

3.13.1. Розпад функції $1/R$ в степеневі ряди

Введемо функцію Лежандра, розглянувши степеневі ряди функції

$$\emptyset = \frac{1}{R} = L_{BA}, \tag{3.133}$$

де $L_{BA} = (R^2 + R_1^2 - 2RR_1 \cos\theta)^{\frac{1}{2}}$ - відстань між двома точками. Тут $\vec{R}$ і $\vec{R}_1$ – радіус-вектори з початком в точці O і кутом θ між ними (рис. 3.15).

$$\frac{1}{L_{BA}} = \frac{1}{R_1}(1 + \rho^2 - 2\rho\mu)^{-\frac{1}{2}} \text{ при } R < R_1$$

та (3.134)

$$\frac{1}{L_{BA}} = \frac{1}{R}(1 + \rho^2 - 2\rho\mu)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{при } R > R_1.$$

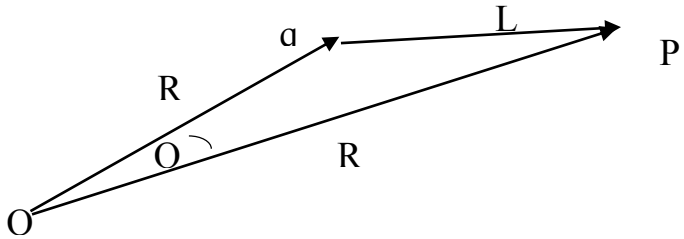


Рис. 3.15 Ілюстрація до рівняння (3.133) за [99]

Можна записати:

В цих рівняннях $\mu = \cos\theta$ ($-1 \le \mu \le +1$), а ρ дорівнює $\frac{R}{R_1}$ при $\frac{R}{R_1} < 1$ або $\frac{R_1}{R}$ при $\frac{R_1}{R} > 1$. Важливо, що в обох випадках цей параметр менше одиниці. Розкладемо функцію:

$$\emptyset(\rho, \mu) = (1 + \rho^2 - 2\rho\mu)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.135}$$

в степеневий ряд по ρ за умови, що $0 < \rho < 1$ та $-1 \le \mu \le +1$. За визначенням

$$\emptyset(\rho, \mu) = \sum_{n=0} \frac{\emptyset^{(n)}(0, \mu)}{n!} \rho^n = \sum_{n=0} P_n(\mu)\rho^n, \tag{3.136}$$

$P_n(\mu)$ називаються функціями Лежандра та залежать тільки від одного параметра $\mu = const$, який змінюється від -1 до +1.

Диференціюючи функцію $\emptyset$ по ρ і підставляючи $\rho = 0$, отримуємо:

$$\emptyset\,(\,0) = 1$$

$$\emptyset^{(1)}(\,0) = \left[\frac{\rho - \mu}{(1+\rho^2 - 2\,\rho\mu)^{\frac{3}{2}}}\right]_{\rho=0} = \mu = \cos\theta, \tag{3.137}$$

$$\emptyset^{(2)}(\,0) = \left[\frac{3(\rho-\mu)^2}{(1+\rho^2-2\,\rho\mu)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(1+\rho^2-2\,\rho\mu)^{\frac{3}{2}}}\right]_{\rho=0} = 3\cos^2\theta - 1 \text{і т.п.}$$

Відповідно, рівняння (3.136) можна представити:

$$\emptyset\,(\,\rho,\mu) = \frac{1}{(1+\rho^2-2\,\rho\mu)^{\frac{1}{2}}} = 1 + \rho\cos\theta + \rho^2\,\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} + \cdots, \tag{3.138}$$

та, таким чином,

$$\left\{\begin{array}{c} P_0(\mu) = 1, P_1(\mu) = \cos\theta, \\ P_2(\mu) = \frac{3}{2}\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right), \\ P_3(\mu) = \frac{5}{2}\left(\cos^3\theta - \frac{3}{5}\cos\theta\right). \end{array}\right\} \tag{3.139}$$

Таким же чином можна отримати функції Лежандра будь-якого порядку n.

Підставляючи тепер рівняння (3.136) в (3.134), отримаємо рівняння:

$$\frac{1}{L_{BA}} = \frac{1}{R_1}\sum_{n=0}\left(\frac{\mathrm{R}}{R_1}\right)^n P_n(\cos\theta) \text{при } R < R_1$$

та (3.140)

$$\frac{1}{L_{BA}} = \frac{1}{R}\sum_{n=0}\left(\frac{R_1}{\mathrm{R}}\right)^n P_n(\cos\theta) \text{при } R > R_1.$$

Ці формули досить важливі, оскільки вони дозволяють описати потенціал поля притягання, який створений довільним розподілом мас через функції Лежандра і відстань до початку координат R. З фізичної точки зору зрозуміло, що рівняння (3.140) характеризує потенціал, що створюється одиничною масою. Тоді, застосовуючи принцип суперпозиції, легко можна узагальнити ці вирази і отримати формули для потенціалу всередині та зовні будь-яких мас, цей перехід буде застосований в подальшому.

Поліноми Лежандра детально вивчені та їм притаманні багато властивостей. Наприклад, ці функції, як і тригонометричні, і функції

Бесселя, ортогональні. Точніше, поліноми Лежандра різного порядку ортогональні на інтервалі (-1; +1):

$$\int_{-1}^{1} P_n(\mu)P_m(\mu) = 0 \text{ при } m \neq n \qquad \text{та}$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(\mu)P_m(\mu) = \frac{2}{2n+1} \qquad \text{при } m=n.$$

Це одна з причин , за якою функції мають таке велике значення при розв'язку крайових задач. Крім того, між поліномами Лежандра різного порядку існує досить просте рекурентне співвідношення:

$$(n + 1)\, P_{n+1}(\mu) - \mu(2n + 1)P_n(\mu) + nP_{n-1}(\mu) = 0,$$

яке можна використовувати для обчислення $P_n(\mu)$ при n>2, оскільки $P_0(\mu) = 1$ та $P_1(\mu) = \mu$.

Звернемо увагу на те, що внаслідок ортогональності поліномів Лежандра багато функцій можуть бути представлені у вигляді рядів, що нагадують рівняння (3.140), цей факт широко використовується в математичній фізиці. Отримаємо тепер диференціальне рівняння, одним з розв'язків якого будуть функції Лежандра:

3.13.2. Рівняння Лапласа та функції Лежандра

Покажемо, що за допомогою функцій Лежандра можна знайти розв'язок рівняння Лапласа [99, 115]. Як знаємо, рівняння Лапласа в сферичній системі координат має наступний вид:

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \sin\theta \frac{\partial U}{\partial R}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial U}{\partial \theta}\right) = 0, \qquad (3.141)$$

за умови, що функція U не залежить від координати φ. Це рівняння в часткових похідних другого порядку, де U залежить від двох сферичних координат R і θ. Припустимо, що розв'язок може бути представлений у вигляді добутку двох функцій так, що кожна з функцій залежить тільки від одного аргументу:

$$U = T(R)P(\theta). \qquad (3.142)$$

Підставимо (3.142) в рівняння (12.141), отримаємо:

$$P(\theta)\sin\theta \frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial T}{\partial R}\right) + T(R)\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial P}{\partial \theta}\right) = 0$$

Розділивши обидві частини цього рівняння на $T(R)P(\theta)\sin\theta$, отримаємо:

$$\frac{1}{T(R)}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial T}{\partial R}\right) + \frac{1}{P(\theta)\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial P}{\partial \theta}\right) = 0 \qquad (3.143)$$

Природно виділити в лівій частині рівняння (3.143) два члени:

1 член – f(R) $=\frac{1}{T(R)}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial T}{\partial R}\right)$ та

2 член – f(θ) $=\frac{1}{P(\theta)\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)$.

На перший погляд, обидва члени залежать відповідно від R і θ, і рівняння (2143) може бути представлено у вигляді:

f(R) + f(θ) $= 0$.

Проте, така рівність неможлива, оскільки при зміні одного аргументу, наприклад, R, перший член змінюється, в той час як другий залишається сталим і, відповідно, сума цих членів може бути рівною нулю для довільних значень R іθ. Тому ми маємо зробити висновок про те, що жодний з цих членів не залежить від координат, і кожний з них – сталий.

Цей факт лежить в основі метода розділення змінних, що дозволяє представити функцію U у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких залежить від тільки від однієї координати. Для зручності запишемо цю сталу у виді $\pm m^2$, де m називається константою розділення. Тоді замість рівняння Лапласа ми маємо два звичайних диференціальних рівняння другого порядку:

$$\frac{1}{T(R)}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial T}{\partial R}\right) = \pm m^2$$

та (3.144)

$$\frac{1}{P(\theta)\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right) = \mp m^2.$$

Поклавши m^2 = n(n+1) і обираючи «мінус» в правій частині другого рівняння, ми отримаємо рівняння Лежандра, одним з розв'язків якого буде функція $P_n(\cos\theta)$:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right) + n(n+1)\sin\theta\, P(\theta) = 0. \quad (3.145)$$

Відповідно, рівняння для функції $T(R)$ має вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial T}{\partial R}\right) - n(n+1)T(R) = 0, \quad (3.146)$$

і легко бачити, що функції R^n і R^{-n-1}задовольняють цьому рівнянню.

Відзначимо, що рівняння Лежандра має також і другий розв'язок, який тут не розглядається. Як витікає з рівняння (3.142), для кожного n ми отримаємо частковий розв'язок, що має вид:

$$U(R,\theta) = (A_nR^n + B_nR^{-n-1})P_n(\cos\theta). \quad (3.147)$$

Здійснюючи підсумування по n, отримаємо загальний розв'язок, що не залежить від n:

$$U(R,\theta) = \sum_{n=1} \quad (A_n R^n + B_n R^{-n-1}) P_n(\cos\theta). \qquad (3.148)$$

Рівняння (3.140) може слугувати прикладом представлення функції $\frac{1}{L_{BA}}$ у вигляді суми часткових розв'язків рівняння Лапласа. Далі ми скористаємося рівнянням (3.148) для опису гравітаційного поля Землі.

4. ПРИТЯГАННЯ ТІЛ ПРАВИЛЬНОЇ ФОРМИ

4.1. Притягання сферичного шару і кулі

Нехай маса, що притягає, розташована у вигляді шару постійної густини μ на поверхні сфери радіуса R. Визначимо силу притягання в точці P, яка є зовнішньої щодо цієї поверхні (рис. 4.1). Через ρ позначимо відстань точки *P* від центру сфери *O*.

Припустимо, що в довільній точці M знаходиться маса $dm = \mu ds$. Визначимо складову сили тяжіння за напрямком *PO*. Для цього вираз для напруженості гравітаційного поля помножимо на косинус кута *MPO*. З рис. 4.1 очевидно, що

$$\cos MPO = \frac{\rho - R\cos\psi}{r}. \qquad (4.1)$$

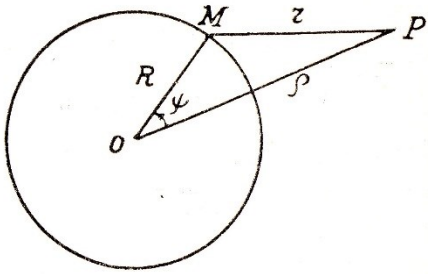


Рис. 4.1. Притягання сферичним шаром зовнішньої точки.

Отже, значення складової сили тяжіння визначає наступний інтеграл по поверхні сфери:

$$V_\rho = G\mu \int_S \frac{\rho - R\cos\psi}{r^3} dS. \qquad (4.2)$$

Обчислення інтеграла зручно виконати у сферичній системі координат. Оскільки

$$dS = R^2 \sin\psi d\psi d\alpha,$$

то

$$V_\rho = \mu G \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\rho - R\cos\psi}{r^3} R^2 \sin\psi d\psi d\alpha . \qquad (4.3)$$

Інтегрування по α дає множник 2π. Інтегрування по ψ більш складна задача, тому застосуємо штучний прийом: зробимо змінною інтегрування величину r. Згідно з кресленням

$$r^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R\cos\psi , \qquad (4.4)$$

звідси знаходимо

$$\rho - R\cos\psi = \frac{\rho^2 + r^2 - R^2}{2\rho},$$
$$\sin\psi d\psi = \frac{r}{\rho R} dr. \qquad (4.5)$$

Що стосується меж інтегрування, то, як неважко бачити, при $\psi = 0$ маємо $r = \rho = R$ і при $\psi = \pi$ маємо $r = \rho + R$.

Виконуючи необхідні перетворення, будемо мати

$$V_\rho = 2\pi\mu G \frac{R}{2\rho^2} \int_{\rho-R}^{\rho+R} \left(\frac{\rho^2 - R^2}{r^2} + 1 \right) dr \qquad (4.6)$$

і далі

$$V_\rho = 2\pi\mu G \frac{R}{2\rho^2} \left[-\frac{\rho^2 - R^2}{r} + r \right]_{\rho-R}^{\rho+R} = 2\pi\mu G \frac{2R^2}{\rho^2} . \qquad (4.7)$$

Позначимо через m масу всього поверхневого шару. Оскільки $m = 4\pi\mu R^2$, то

$$V_\rho = G\frac{m}{\rho^2} . \qquad (4.8)$$

Цей результат показує, що сферичний шар постійної густини і рівновелика за масою матеріальна точка, що збігається з центром сфери, притягують зовнішню точку з однаковою силою.

Якщо у формулі (4.8) покласти $\rho = R$, то отримаємо значення сили тяжіння на поверхні сфери. Замінюючи масу m через масу поверхневого шару, матимемо

$$V_\rho = 4\pi\mu G . \qquad (4.9)$$

Корисно звернути увагу на таку особливість. Здавалося б, що для спрощення математичних викладок, необхідних для визначення сили тяжіння на поверхні сфери, можна було б покласти $\rho = R$ ще в інтегральному виразі, з якого отримано рівність (4.7). Однак, якщо це зробити, то легко перевірити, що отримаємо

$$V_\rho = 2\pi\mu G. \qquad (4.10)$$

Це значення називається *формальним*, і значення, отримане за формулою (4.7) при $\rho = R$, називається граничним.

Тепер розглянемо задачу про притягання однорідною кулею зовнішньої точки. Припустимо, що тіло кулі концентричними сферами розбито на ряд шарів одиничної товщини. Оскільки притягання кожного шару не залежить від його радіуса, а залежить тільки від кількості маси, то, кожен шар можемо замінити точкової масою в центрі кулі. У такому випадку підсумовування притягань окремих шарів зводиться до підсумовування мас цих шарів. В результаті всього отримуємо, що для обчислення сили тяжіння кулі можна користуватися формулою (4.8), якщо під *M* приймаємо масу кулі.

Розглянемо притягання сферичним шаром внутрішньої точки. При $\rho < R$ інтеграл для обчислення складових потенціалу зберігає свій вигляд, але при обчисленні його згідно з рис. 4.2 при $\psi = 0$ нижня межа дорівнюватиме $r = R - \rho$ і при $\psi = \pi$ верхня межа – $r = R + \rho$.

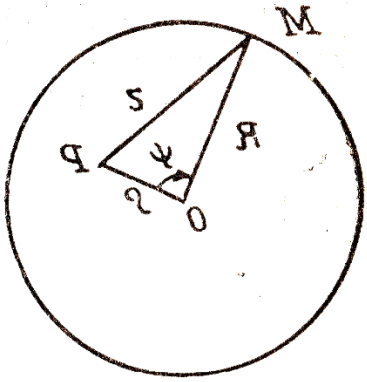


Рис. 4.2. Притягання сферичним шаром внутрішньої точки.

Внаслідок цього матимемо далі замість (4.6)

$$V_\rho = 2\pi\mu G \frac{R}{2\rho^2} \int_{R-\rho}^{R+\rho} \left(\frac{\rho^2 - R^2}{r^2} + 1 \right) dr \,. \qquad (4.11)$$

та замість (4.7)

$$V_\rho = 2\pi\mu G \frac{R}{2\rho^2} \left[-\frac{\rho^2 - R^2}{r} + r \right]_{R-\rho}^{R+\rho} = 0. \qquad (4.12)$$

Це означає, що однорідний сферичний шар внутрішню точку при будь-якому її положенні всередині сфери не притягує.

З приводу притягання внутрішньої точки кулею зазначимо таке. Якщо через дану точку провести допоміжну концентричну сферу, то тим самим куля буде підрозділена на дві частини. Дія першої частини, що знаходиться всередині допоміжної сфери, можна знайти за формулою притягання кулею зовнішньої точки. Дія другої частини, тобто шару між двома концентричними сферами, дорівнює нулю, так як дана точка щодо цього шару є внутрішньою.

Розглянемо гравітаційні властивості сферичного шару і кулі на наступному штучному прикладі. Нехай є однорідна куля з пустотілою областю навколо центру. Розглянемо зміну сили тяжіння при переміщенні притягуємої точки в радіальному напрямку (рис. 4.3).

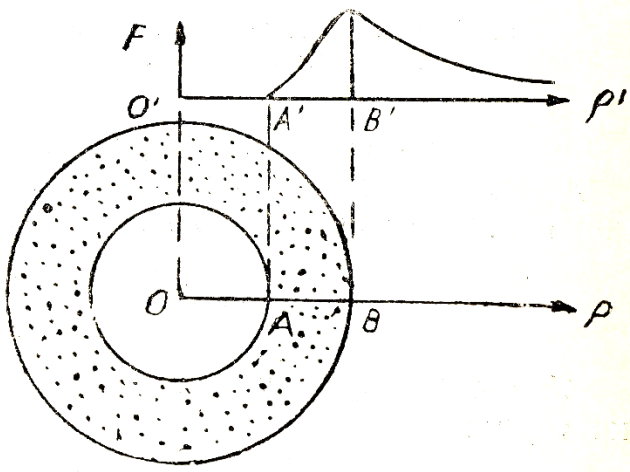


Рис. 4.3. Графік сили притягання сферичного шару кінцевої потужності при різних положеннях точки, що притягується.

У точках відрізка ОА, які є внутрішніми для даного розподілу, сила тяжіння дорівнює нулю. При положенні притягуємої точки на відрізку АВ поділимо концентричною сферою, що проходить через дану точку маси, що притягуються, на два сферичних шари кінцевої товщини: зовнішній і внутрішній. Зовнішній шар на точку гравітаційної дії не чинить, дію внутрішнього шару можна замінити дією еквівалентної точки в центрі кулі. Таким чином, з переміщенням точки всередині шару від А до В потужність внутрішнього шару буде зростати і величина сили тяжіння відповідно збільшуватиметься і в точці В досягне свого максимального значення. При віддаленні точки праворуч від В величина сили тяжіння зменшується пропорційно квадрату відстані від центра О, асимптотично наближаючись до нуля.

4.2. Притягання горизонтального відрізка і лінії

Нехай в координатній площині *XOY* прокладено паралельно осі *OY* матеріальний відрізок. Визначимо силу тяжіння в точці *P* (рис. 4.4). Якщо λ – маса одиниці довжини (лінійна густина), то

$$dm = \lambda d\eta$$

і, отже, точкова маса буде притягувати *P* з силою

$$G\frac{\lambda d\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}. \qquad (4.13)$$

Так як кожна точка відрізка притягує точку *P*, то, ставлячи питання про знаходження сумарної дії, необхідно фіксувати напрямок, за яким будемо шукати цю дію, а без цього задача позбавлена сенсу. Отже, будемо шукати силу тяжіння за напрямком відрізка PO_1, тобто в координатній площині *XOY*. У такому випадку силу притягання точкової маси треба помножити на

$$\cos(MPO_1) = \frac{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}.$$

Силу притягання всього відрізка дає наступний інтеграл:

$$F = \lambda G \int_{b_1}^{b_2} \frac{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} d\eta.$$

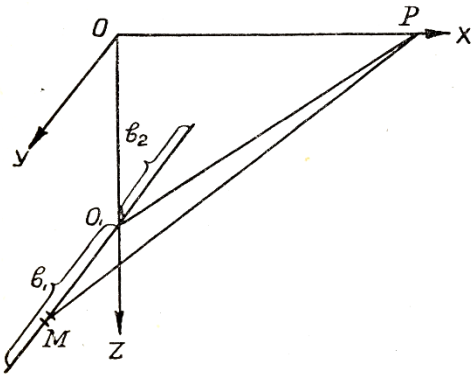


Рис. 4.4 Притягання точки горизонтальним відрізком.

Позначимо

$$p^2 = \xi^2 + \zeta^2,$$

тоді

$$F = \lambda G \int_{b_1}^{b_2} \frac{p}{\left(p^2 + \eta^2\right)^{\frac{3}{2}}} d\eta.$$

Цей інтеграл легко обчислюється за допомогою підстановки:

$$\eta = p tg\varphi.$$

Опускаючи нескладні викладки, в підсумку отримуємо:

$$F = \lambda G \left[\frac{b_1}{p\sqrt{p^2 + b_1^2}} - \frac{b_2}{p\sqrt{p^2 + b_2^2}} \right].$$

Якщо $b_1 = -b_2 = b$, то вираз у дужках набуде максимального значення, тобто

$$F = 2\lambda G \frac{b}{p\sqrt{p^2 + b^2}}. \qquad (4.14)$$

Щоб знайти значення F при $b = \infty$, розділимо чисельник і знаменник на b; на межі підкореневий вираз перетворюється в. одиницю, тому

$$F = 2\lambda G \frac{1}{p}.$$

Це показує, що сила тяжіння горизонтальної лінії нескінченної протяжності пропорційна подвійній лінійній густині і обернено пропорційна довжині перпендикуляра, опущеного на цю лінію.

В системі прямокутних координат складові сили тяжіння по осям визначаються таким чином:

$$F_x = 2\lambda G \frac{\xi}{p^2}; \quad F_z = 2\lambda G \frac{\zeta}{p^2}. \qquad (4.15)$$

Легко помітити, що ці функції є похідними за прямокутними координатами від потенціалу, що виражається, наступною формулою:

$$V = 2\lambda G \ln \frac{1}{p}. \qquad (4.16)$$

Оскільки початок координат збігається з точкою, що притягується, то

$$F_x = V_x = -\frac{\partial V}{\partial \xi}; \quad F_z = V_z = -\frac{\partial V}{\partial \zeta}.$$

Потенціал представлений в (4.16) називається логарифмічним, він застосовується при вивченні гравітаційних полів, обумовлених циліндричними тілами, необмежено витягнутими за напрямком однієї координатної осі, звичайно осі y. Так як такого роду розподілення мас і створювані ними поля залежать тільки від двох координат, то вони є двомірними.

Аналогічно тому, як це було обчислено для кулі, можна показати, що однорідний круговий горизонтальний циліндр нескінченної протяжності притягує зовнішню точку з такою ж силою, як лінія, що збігається з його віссю; зрозуміло, густина цієї лінії повинна дорівнювати масі поперечного перерізу, а саме

$\lambda = \pi\sigma R^2$,

де σ – об'ємна густина.

Для двовимірних розподілів з перерізом більш складного виду, ніж коло, V і V_z виражаються за допомогою таких інтегралів:

$$V = 2\sigma G \int_S \ln \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}} dS,$$
$$V_z = 2\sigma G \int_S \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}} dS. \qquad (4.17)$$

4.3. Притягання диска, шару, циліндра і конуса

Найпростішим випадком розподілу маси з осьовою симетрією є шар у вигляді кругового диска. Нехай точка, що притягується, знаходиться на продовженні осі диска; початок координат сумісний з цією точкою і вісь z спрямуємо в сторону диска. Виведемо формули для складової сили тяжіння по цій осі.

Нехай μ – поверхнева густина маси, що притягає, і R – радіус диска; точка P, яка притягується, знаходиться на висоті h (рис. 5). Візьмемо в точці M диска елемент маси dm; користуючись циліндричними координатами, маємо:

$dm = \mu\rho d\rho d\alpha$.

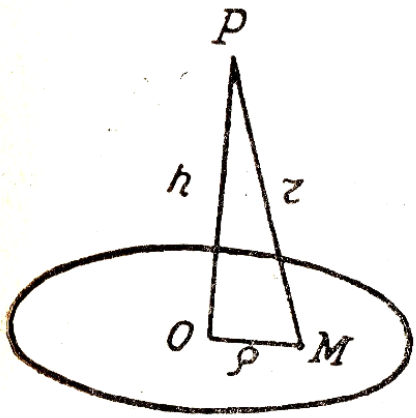


Рис. 4.5. Притягання точки круговим диском.

Сила тяжіння, що розвивається масою dm, спрямована вздовж відрізку r. Щоб отримати проекцію на вісь *z*, необхідно помножити цю силу на $\cos(OPM)$. Таким чином, точка *M* створює вздовж осі наступну дію:

$$\frac{dm}{r^2} \bullet \frac{h}{r}.$$

Силу тяжіння всього диска дає, очевидно, інтеграл:

$$V_z = \mu G \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{h\rho}{\left(\rho^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}} d\rho d\alpha .$$

Інтегрування по α дає множник 2π. Виконуючи інтегрування по ρ, знаходимо

$$V_z = 2\pi\mu G \left[-\frac{h}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \right]_0^R$$

і далі отримуємо необхідну формулу:

$$V_z = 2\pi\mu G \left[1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right]. \qquad (4.18)$$

Неважко бачити, що зі збільшенням радіусу диска (або зі зменшенням висоти h) сила тяжіння збільшується і в граничному значенні при $R = \infty$ (або при h=0) приймає значення

$$V_z = 2\pi\mu G. \qquad (4.19)$$

Це означає, що сила тяжіння матеріального шару на нескінченній площині залежить тільки від густини шару; висота точки h у формулі не бере участь.

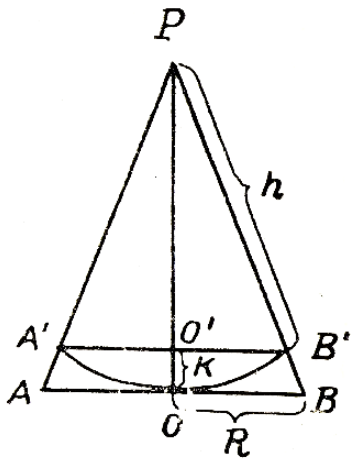


Рис. 4.6. Диск і сферичний сегмент, виміряні одним й тим самим тілесним кутом, притягують однаково.

Розглянемо геометричну інтерпретацію формули (4.18). Якщо провести з точки P до граничних точок диска прямі, то отримаємо круговий конус (рис. 6). Всередині конуса побудуємо сегмент сфери радіуса $PO=h$. Оскільки висота сегмента визначається за формулою

$$k = h\left[1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}\right],$$

а площа сегмента за формулою

$$S = 2\pi kh,$$

то, остаточно отримаємо,

$$S = 2\pi h^2 \left[1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right].$$

Приймаючи радіус сфери h=1, отримуємо величину тілесного кута, тобто кута, під яким із точки P вбачається площа диска. Позначимо

$$\omega = 2\pi \left[1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right];$$

в такому випадку формулу (4.18) можемо написати в наступному вигляді:

$$V_z = \mu\omega G. \qquad (4.20)$$

Таким чином, тяжіння однорідного шару в вигляді диска дорівнює добутку поверхневої густини на величину тілесного кута.

Тілесний кут площині, якою простір поділяється на дві частини, дорівнює 2π, тому для однорідного шару на нескінченній площині, виходячи з формули (4.20), отримуємо формулу (4.19).

При заданому радіусі диска величина тілесного кута залежить від висоти h. Зі зменшенням висоти тілесний кут збільшується. У межі, коли точка, що притягується, буде знаходитися від поверхні диска на нескінченно малій відстані, тілесний кут буде наближатися до свого граничного значення, тобто до 2π. Звідси випливає, що точка, що лежить на поверхневому шарі, притягується з силою, пропорційною густині шару. Цей результат в гравірозвідці має велике практичне значення: за виміряними величинами сили тяжіння можна обчислити густину шару, і навпаки. Очевидно,

$$\mu = \frac{V_z}{2\pi G}. \qquad (4.21)$$

Вираз вертикальної складової сили тяжіння через тілесний кут $d\omega$ поширюється на випадок однорідного шару довільної форми. Дійсно, нехай точка P зазнає притягання з боку однорідного плоского шару, обмеженого кривою довільного вигляду (рис. 7). Елемент плоского шару дає дію:

$$dV_z = G\frac{dm}{r^2}\cos\varphi,$$

де

$$\cos\varphi = \frac{h}{r} \text{ і } dm = \mu ds .$$

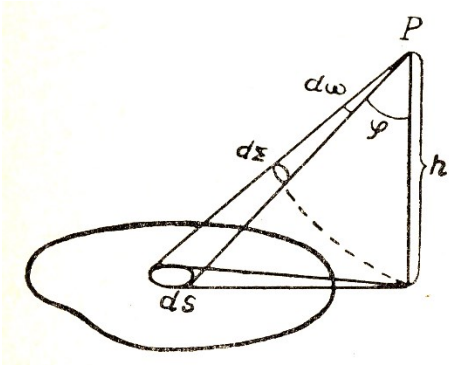


Рис. 4.7. Вертикальна складова сили притягання пропорційна величині тілесного кута.

Усередині похилого конуса, основа якого ds і тілесний кут $d\omega$ побудуємо площадку $d\Sigma$, сфери радіуса h. Так як $d\Sigma$ нахилена до площини шару на кут, то, маємо,

$$\frac{ds\cos\varphi}{r^2} = \frac{d\Sigma}{h^2}$$

і далі:

$$dm = \mu \frac{r^2}{h^2 \cos\varphi} d\Sigma ,$$

тому

$$dV_z = G\frac{\mu}{h^2} d\Sigma .$$

Так як $\frac{d\Sigma}{h^2} = d\omega$, то, виконавши інтегрування, отримаємо далі формулу (4.20).

Випадок простого шару на поверхні. Нехай *S*- не площина, а поверхня; шар має змінну густину μ. Визначимо в точці *P* на самій поверхні складову V_z, вважаючи, що вісь спрямована за внутрішньої нормаллю (рис. 4.8).

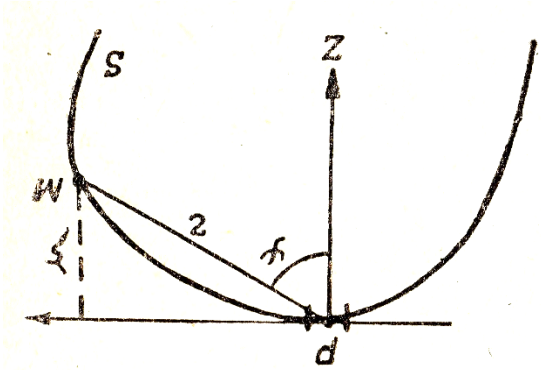


Рис. 4.8. Притягання шаром змінної густини точки на його поверхні.

На поверхні поблизу точки *P* виділимо круговий диск. Вважаючи, що в межах диска густина постійна, його дію знайдемо за формулою (4.19). Що стосується дії шару по поверхні $S^{/}$ (штрих означає, що виключений диск), то отримаємо наступну формулу:

$$V_z(P^{/}) = G\int_{S^{/}} \frac{\mu\cos\psi}{r^2}dS = G\int_{S^{/}} \mu\frac{\xi}{r^2}dS\,. \qquad (4.22)$$

Втім, при обчисленні цього інтеграла виключення диска можна не обмовляти, бо при $\xi = 0$ значення інтеграла по поверхні диска дорівнює нулю. Отримане таким шляхом $V_z\left(P^{/}\right)$прийнято називати формальним значенням похідної за нормаллю; визначення в разі сферичного шару було дано раніше. Повну величину сили тяжіння дає граничне значення, що виражається у вигляді суми:

$$V_z = 2\pi\mu G + G\int_S \mu\frac{\xi}{r^2}dS\,. \qquad (4.23)$$

Інтегральна складова, як це було вище показано, для. сферичного шару постійної густини дорівнює $2\pi\mu G$ і для шару на нескінченній горизонтальній площині дорівнює нулю. Взагалі кажучи, притягання шару постійної густини на будь-якій опуклій поверхні менше $4\pi\mu G$ і більше $2\pi\mu G$. Властивості поверхонь, що забезпечують однозначне визначення похідної потенціалу за

напрямком нормалі, були докладно досліджені російським ученим А. М. Ляпуновим (1857–1918), тому відповідні умови і поверхні зазвичай називаються його ім'ям.

На закінчення зазначимо, що рівність (4.23) щодо шуканої густини μ є інтегральним рівнянням; вивчення цього рівняння приводиться в курсах математичної фізики.

Притягання кругового однорідного циліндра. Розглянемо лише окремий випадок: точка, яка притягується, знаходиться в центрі верхньої основи циліндра. Що стосується загального випадку, коли точка знаходиться не на осі, то задача зводиться до інтегралу, який в елементарних функціях не виражається.

Розглядаючи тяжіння диска (4.18) як дію елементарного шару, виразимо поверхневу густину μ через об'ємну σ, тобто

$$\mu = \sigma dh .$$

У такому випадку шукане значення отримаємо за допомогою інтегрування елементарного шару в межах від 0 до, де Н – висота циліндра. Отже,

$$V_z = 2\pi\sigma G \int_0^H \left[1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right] dh = 2\pi\sigma G \left[h - \sqrt{R^2 + h^2} \right]_0^H$$

і далі:

$$V_z = 2\pi\sigma G \left[H + R - \sqrt{R^2 + h^2} \right]. \qquad (4.24)$$

Якщо розкласти радикал в ряд за ступенями $\frac{H^2}{R^2}$ і покласти $R \to \infty$, то отримаємо

$$V_z = 2\pi\sigma GH ,$$

що знову повторює результат (4.19). Таким чином, притягання однорідного шару нескінченної протяжності пропорційно добутку σH і не залежить від висоти, на якій знаходиться точка, яка притягується.

Якщо виражати V_z в мгал і H – в метрах, то, $2\pi G = 0{,}0419$, і, отже,

$$V_z = 0{,}0419\sigma H . \qquad (4.25)$$

Притягання однорідного конуса. Розглянемо окремий випадок, коли точка, що притягується знаходиться у вершині. Вплив елементарного шару виражає формула (4.20), тому, щоб отримати силу притягання конуса, необхідно цей результат проінтегрувати за висотою. Замінюючи $\mu = \sigma dh$, маємо

$$V_z = \sigma\omega G \int_0^H dh ,$$

так що $V_z = \sigma\omega GH$. У випадку усіченого конуса

$$V_z = \sigma\omega G\left(H_1 - H_2\right). \qquad (4.26)$$

Цей результат зберігає свою силу і для піраміди.

5. ГУСТИНА ГІРСЬКИХ ПОРІД

Щільнісні характеристики, найуживанішою з яких є густина, належать до числа найважливіших екстенсивних параметрів які характеризують стан природних систем – адже саме густина визначає мольний об'єм речовини і її знання необхідне при розрахунках об'ємів елементарних комірок мінералів. Оскільки густина є властивістю речовини, що визначає її масу в одиниці об'єму, то вона безумовно впливає на всі інтенсивні параметри систем: величину тиску і температури, а також, безумовно, на концентрацію пустот [123].

5.1. Густина магматичних порід

В загальному випадку щільнісні властивості магматичних порід визначаються як їх складом, так і структурно-текстурними особливостями.

Можливість прогнозування складу магматичних порід за мінеральною густиною (і навпаки) при використанні певних сумарних коефіцієнтів була доведена ще Н.Б.Дортман.

Водночас, оскільки пористість невивітрених відмін інтрузивних порід, як правило, не перевищує перших відсотків, то головним чинником що визначає величину їх густини слід вважати особливості хімічного та мінерального складу. Вплив структурно-текстурних особливостей, в більшості випадків, призводить до зміни величини об'ємної густини не більш як на 50-70 кг/м^3, що співставно із змінами які обумовлені епігенетичними процесами (зменшення густини при вивітрюванні без порушення суцільності порід досягає 40-100 кг/м^3), чи зростанням вмісту акцесорних мінералів. Вплив структури порід на їхню густину достатньо чітко простежується лише у випадку подібності складу порід. Так, густина слабкопорфіровидних гранітів Новолазарівського масиву УЩ на 7-10 кг/м^3 нижча густини рівномірно-зернистих відмін, виникнення порфіробластів та овоїдів супроводжується зниженням σ_O на 5-15 кг/м^3.

В безрудних відмінах магматичних порід (табл. 5.1)

лужноземельного ряду середнє значення об'ємної густини зростає в ряду граніт-олівініт (від 2550-2650 кг/м^3 до 3200-3500 кг/м^3), що на загал узгоджується із зменшенням вмісту кремнезему і зростанням вмістів фемічних окислів.

Таблиця 5.1 – Об'ємна густина (в кг/м^3) магматичних порід (за Дортман Н.Б., 1984, В.М.Добринін, 1981).

Порода	$\sigma_{Осер}$	σ_{Omin}-σ_{Omax}	Порода	$\sigma_{Осер}$	σ_{Omin}-σ_{Omax}
Ліпарит масивний	2500	2400-2600	Діорит кварцовий	2750	2650-2810
- мигдалекам'яний	2300	2150-2450	Лабрадорит	2670	2630-2690
- пемзовий	2100	1900-2200	Анортозит	2730	2700-2760
Порфір кварцовий	2600	2550-2650	Базальт масивний	2750	2600-2800
Граніт	2590	2550-2680	мигдалекам'яний	2500	2400-2600
Граніт аляскітовий	2570	2550-2610	- пузирчастий	2300	2100-2450
Граніт біотит-роговообманковий	2640	2600-2680	- пемзовий	2100	2000-2150
Плагіограніт	2650	2570-2700	Діабаз	2850	2750-3100
Тоналіт	2680	2630-2750	Габро	2950	2850-3050
Гранодіорит	2690	2640-2780	Габро олівінове	3080	3020-3100
Андезит масивний	2600	2450-2650	Піроксеніт	3180	2900-3400
- мигдалекам'яний	2350	2150-2500	Перидотит	3200	2850-3300
- пемзовий	2100	1900-2200	Дуніт	3200	3200-3400
Діорит	2810	2670-2920			

$\sigma_{Oсер}$ - середнє значення об'ємної густини; σ_{Omin}-σ_{Omax} - межі змін густини найбільш поширених відмін

Густина порід лужного ряду за однакового вмісту кремнезему з породами нормального ряду є дещо нижчою, що обумовлено високими концентраціями лужних елементів із великим атомним радіусом, які утворюють мінерали менш щільних упаковок.

Так, відміни сієнітів, які складаються майже виключно з польових шпатів, мають густину меншу за густину гранітів. Суперпозиція впливу чинників складу і умов утворення та існування визначає наявність досить широких діапазонів змін густини інтрузивних порід – від 100 кг/м^3 у кислих порід, до більш як 300 кг/м^3 – в ультраосновних.

Найвужчий діапазон зміни густини притаманний кислим породам (табл. 5.1). В найбільш лейкократових їх відмінах, за незначного вмісту акцесорних мінералів, величина густини фактично визначається співвідношенням вмісту калієвих польових шпатів і кварцу. Для більшості ж гранітів найбільш суттєві варіації значень пов'язані із зміною вмісту біотиту та амфіболу. Дисперсія густини в межах масивів гранітів залежить від витриманості складу та текстурних особливостей порід, а також від наявності зон ущільнення і розтягу, і може бути дуже незначною. Так, у вже згадуваних рівномірно-зернистих гранітах Новолазарівського масиву середнє квадратичне відхилення густини не перевищує 2 кг/м^3, збільшуючись в порфіровидних відмінах до 7 кг/м^3.

Густина середніх та основних порід суттєвим чином залежить від вмісту та складу фемічних мінералів (перш за все, амфіболів та піроксенів). Це добре видно при порівнянні густини габро і анортозиту, а також нормального та лейкократового габро. Процеси амфіболітизації основних порід, як правило, призводять до зниження їх густини. Густина порід підвищеної лужності (сієніти, граносієніти) дещо нижча густини порід нормального ряду.

Для всіх видів ультраосновних порід характерна висока густина – найбільші її значення зафіксовані в олівінітах і дунітах. При загальній залежності густини від вмісту SiO_2 дуже велике значення має залізистість мінералів у рядах піроксенів і олівінів. Відмінність густини суто залізистих і суто магнезіальних відмін олівініту може сягати більш як 500 кг/м^3, проте такі різновиди порід дуже рідкісні, а для більшості масивів характерний полімінеральний склад порід із

типовим співвідношенням різних мінералів у різноманітних формаціях. При слабкій серпентинізації густина порід гіпербазитових масивів зменшується до 3000-3200 кг/см^3, а при інтенсивній - до 2600-2700 кг/м^3.

Залежність від складу величини густини ефузивних порід є подібною до інтрузивних порід. Тож в загальному випадку за величиною σ_O можна з певною похибкою прогнозувати їх середній хімічний склад: в нормальному ряду густина зростає від кислих до основних відмін. Широкий діапазон зміни густини ефузивних порід близького мінерального складу обумовлений як відмінністю сингенетичних структур і текстур, так і подальшими діагенетичними перетвореннями. За близького хімічного складу (ліпарит - кварцовий порфір, андезит – порфірит, базальт – діабаз) густина палеотипних порід, як правило, дещо вища від густини їх кайнотипних аналогів. Причиною цього є спонтанна розкристалізація склуватої маси ефузивних порід (спочатку з'являються мікрокристаліти, а надалі породи набувають зернистої структури), а також епігенетичні перетворення деяких мінералів (розклад плагіоклазу з утворенням хлориту, серициту, епідоту тощо). Безсумнівним є вплив структурних і текстурних чинників на величину густини: при швидкому остиганні лав і значній кількості газів утворюються пористі текстури (пемзові, пузирчасті, мигдалекам'яні тощо) і склуваті структури. За меншої швидкості остигання скло встигає розкристалізуватися, і породи стають кристалічними. В межах одного лавового потоку можуть спостерігатися різноманітні структури і текстури порід, що спричиняє значну неоднорідність за густиною. Відмінності сингенетичних структур і текстур відображаються в величинах пористості та густини головним чином в кайнотипних ефузивах, пористість же палеотипних ефузивних порід змінюється в порівняно невеликих межах.

5.2. Густина метаморфічних та ультраметаморфічних порід

Головними факторами метаморфізму гірських порід є:

- температура;
- тиск всебічний, гідростатичний та направлений;
- хімічно активні флюїди та гази,
- привніс мінеральної речовини тощо.

Підвищення температури може бути пов'язано з зануренням порід на більші глибини, тепловим впливом магми, місцевим підвищенням теплового потоку, припливом глибинних флюїдів та іншими процесами.

Тиск призводить до деформації мінералів та зміні структури пустотного простору, викликає просторову орієнтацію їх в гірських породах. Завдяки деформації виникають нові тріщини, що збільшує інтенсивність переміщення флюїдів та їх хімічних взаємодій з скелетом породи.

Всі фактори можуть приводити до перекристалізації мінералів та гірських порід в залежності від форми метаморфізму.

При будь-яких метаморфічних перетвореннях гірських порід, які пристосовуються до нових термо-динамічних умов, відбуваються зміни в фізичних властивостях порід, а в першу чергу в значеннях густини.

Щільнісні властивості (як і фізичні властивості загалом) метаморфічних порід залежать від: складу вихідних порід, термодинамічних умов і тривалості процесів метаморфізму, змін хімічного складу при метасоматичних перетвореннях. Мінливість мінерального складу обумовлює варіабельність густини в межах однойменних петрографічних груп (див. табл. 5.2) - часто характерною є безперервна зміна густини від вихідної до повністю зміненої породи. Коефіцієнти кореляції густини з вмістом породотвірних мінералів значно нижчі ніж в інтрузивних породах, попри те, що повнокристалічні структури порід і ущільнені текстури обумовлюють невелику пористість метаморфічних порід, яка лише зрідка перевищує 5 %. Характерна для метаморфічних порід сланцюватість не справляє суттєвого впливу на величину густинних властивостей.

Густина змінюється в гірських породах за рахунок структурних перебудов при ізохімічних процесах. Ізохімічним метаморфізмом називають метаморфізм, який відбувається без привносу і виносу

хімічно активних речовин, склад гірських порід практично не змінюється (наприклад, перетворення вапняку в мармур).

В тому випадку, коли метаморфічні перетворення супроводжуються значним привносом або виносом речовини, відбувається заміщення одних мінералів іншими, тобто відбувається метасоматоз. Такі зміни хімічного складу, відповідно, призводять до змін в густині порід.

Таблиця 5.2 - Об'ємна густина (кг/м^3) метаморфічних порід

Порода	$\sigma_{Oсер}$	σ_{Omin}-σ_{Omax}	Порода	$\sigma_{Oсер}$	σ_{Omin}-σ_{Omax}
Філіт	2700	2600-2800	Гнейс піроксеновий	2870	2800-2990
Сланець кременистий	2600	2580-2650	Амфіболіт	3000	2800-3100
Сланець хлоритовий	2760	2720-2800	Піроксеновий кристалосланець	3050	2900-3250
Сланець актинолітовий	2860	2800-2900	Еклогіт	-	3200-3400
Сланець слюдистий	2650	2600-2750	Чарнокіт	2670	2560-2850
Кварцит	2640	2620-2650	Плагіомігматит	2650	2630-2680
Мармур	2700	2680-2720	Мігматит	2630	2600-2700
Сланець біотитовий	2630	2620-2630	Сланець	2550	2500-2700
Сланець амфіболовий	2770	2750-2800	Роговик	2740	2600-2850
Сланець глиноземистий	2750	2700-2800	Скарн	-	2850-3450
Гнейс біотитовий	2630	2600-2680	Серпентиніт	2500	2450-2550
Гнейс глиноземистий	2740	2700-2780	Габро амфіболітизоване	2850	2800-2900
Гнейс амфіболовий	2850	2750-2900	Дуніт серпенти-нізований	-	2600-3100

Регіональний метаморфізм проникає на великі глибини і охоплює великі площі. Факторами такого метаморфізму є високі температура, тиск, вплив флюїдів. В залежності від їх співвідношення змінюється і ступінь метаморфізму.

В регіонально метаморфізованих товщах (за умови ізохімічності по макрокомпонентам) спостерігається зростання густини при збільшенні ступеню метаморфічних змін порід. Найбільш різке збільшення густини (на 8-12 %), спостерігається на початкових етапах перетворення осадових і ефузивних порід, що обумовлено, головним чином, суттєвим зниженням пористості.

Подальше зростання густини, при підвищенні ступеня метаморфізму, відбувається внаслідок утворення поліморфних модифікацій мінералів із більш щільними кристалічними гратками. При цьому в породах основного складу верхня межа зростання густини в процесі метаморфічних перетворень значно вища ніж в породах кислого складу. До того ж ідентичні зміни термодинамічних умов неоднаково впливають на породи різного мінерального складу. Як наслідок, спостерігається значна диференціація регіонально метаморфізованих осадових і осадово-вулканогенних товщ за густиною.

Регресивний метаморфізм (діафторез) пов’язаний з змінами термодинамічних умов в сторону зменшення температури і тиску. При **регресивному** метаморфізмі внаслідок зростання пористості і утворення низькобаричних мінералів, густина порід зменшується. Якщо разом з цими процесами відбувається мілонитизація (роздроблення та перетирання гірських порід), то кристалічні сланці, які утворюються, відрізняються сильно пониженою густиною завдяки збільшенню мікротріщинуватості. Таким чином, низькотемпературні породи характеризуються більш низькою густиною порівняно з високотемпературними.

Ультраметаморфізм – крайня стадія регіонального метаморфізму. Процеси його викликають найбільші зміни гірських порід, при яких відбувається перекристалізація, метасоматоз, селективний або повний розплав. Всі ці перетворення супроводжуються розущільненням порід. Частково або повністю розплавлені породи проникають у вміщуючи породи та утворюються змішані породи, які називають мігматитами, а

різновидами мігматитів є чарнокити. Вважається, що чарнокитизація та гранитизація – найбільші прояви ультраметаморфізму – призводять до суттєвим змінам в фізичних характеристиках порід. Таким чином, відбувається пониження основності і густини порід. Густина новоутвореної породи при неповному заміщенні мінералів залежить від ступеню гранітизації і від густини вихідної породи. При повній зміні порід і утворенні гранітів їх густина фактично не залежить від мінерального складу вихідної породи.

Динамометаморфізм або катакластичний метаморфізм відбувається в верхніх шарах земної кори, головним чином, під тиском сильного однонаправленого тиску – стресу. Він пов'язаний з тектонічними рухами, які викликають розриви в земній корі та переміщення окремих блоків. В процесі переміщення порід по розломам при порівняно низькій температурі відбувається їх дроблення та порушення, змінюються текстурно-структурні особливості порід, але мінеральний склад практично не змінюється. Всі це призводить до пониження густини за рахунок тестурно-структурних змін. При більшому стресі в більш глибоких зонах, де температура підвищується, механічне порушення порід змінюється пластичними деформаціями, відбувається одночасна перекристалізація порід, що часто супроводжується привнесенням речовини, у результаті чого густина може зрости.

Автометаморфізм відбувається в період застигання інтрузивної магми в самому інтрузивному тілі. Широко розвинуті процеси амфіболітизації (заміщення піроксену амфіболом), альбітизації основних плагіоклазов.ю серпентизації ультраосновних порід.

В процесі серпентинизації відбувається розпад мінералів з високою густиною (піроксенів, олівіну) і утворення малощільного серпентину при невеликих вмістах магнетита та інших акцесорних мінералів. Процес відбувається поступово і характеризується також поступовим зменшенням густини порід. Найменшу густину мають серпентенити. Їх подальші зміни – карбонатизація – призводить до нового збільшення густини.

Процес амфіболітизації найбільш характерний для габбро і габбро-нормитів, але спостерігається також і в гіпербазитах. При амфіболітизації відбувається розпад піроксену з утворенням амфіболу і плагіоклазів з кристалізацією хлориту, серициту і

епідоту, тобто мінералів з меншою густиною. Відповідно вихідна порода також характеризується пониженою густиною.

Контактовий метаморфізм пов'язаний з проникненням магми в земну кору, він спостерігається на контактах інтрузій та вміщуючих порід. Тут присутні процеси метасоматозу та утворення метасоматитів. Процеси контактового метаморфізму можуть відбуватися без значних змін хімічного складу вихідної породи, однак в більшості випадків вони супроводжуються підвищенням густини. Наприклад, при утворенні з осадових порід роговиків степінь збільшення густини визначається їх мінеральним складом. Кристалічні сланці, які виникають в результаті проявів метасоматозу глинистих і вапняково-глинистих осадових порід, відрізняються різко підвищеною густиною порівняно з вихідними породами, що обумовлено появою мінералів з високою густиною і різким зменшенням пористості порід.

5.3. Густина осадових порід

Мінеральна густина осадових порід змінюється в достатньо широких межах (табл. 5.3). Зазвичай найвищі її значення характерні для нормально-уламкових порід, а мінімальні – для евапоритів і каустобіолітів. Мінливість мінерального складу як алотигенної так і аутигенної складових осадових порід часто обумовлює значні коливання параметру (близько 10-15 %) навіть в межах однорідного геологічного тіла, що, за умови низької пористості, може суттєвим чином впливати на величину σ_O. При зростанні пористості вплив δ_M на об'ємну густину зменшується.

В загальному випадку найвищою є густина твердої фази карбонатних порід ($\sigma_т$ вапняків змінюється переважно від 2710 до 2740 кг/м^3, а доломітів - від 2800 до 2900 кг/м^3). Дещо нижча густина твердої фази піщаних, алевритових і глинистих порід, значення якої можуть знижуватись до 2200 кг/м^3. Водночас, наявність домішок мінералів з високою густиною (гранат, циркон, рутил, ільменіт, каситерит, магнетит, слюди, пірит, сидерит, шамозит тощо) може призвести до значного зростання густини твердої фази порід, яка в окремих випадках може навіть перевищувати 3500 кг/м^3. Зниження

$\sigma_т$ в карбонатних та уламкових породах зазвичай пов'язане із присутністю опалу, каолініту, алофану та інших мінералів з малою густиною. Густина твердої фази кременистих порід змінюється від 2000 кг/м^3 (діатоміт) до більш як 2650 кг/м^3 (яшми і кремені). Ще нижчою (в разі відсутності значних кількостей ангідриту) може бути густина твердої фази евапоритів: в мірабіліту вона приблизно дорівнює 1500 кг/м^3, у кам'яної солі - 2100-2200 кг/м^3, у гіпсів – близько 2300 кг/м^3. Найнижчі значення густини твердої фази встановлені для графіту і вугілля ($\sigma_т$=1250-2270 кг/м^3), при цьому низькі значення цього параметру відповідають чистому вугіллю з мінімальною кількістю домішок.

Об'ємна густина осадових порід визначається в першу чергу пористістю, яка обумовлена структурою і діагенезом порід, а в меншій мірі мінеральним складом.

Об'ємна густина осадових порід змінюється в діапазоні 1200-3000 кг/м^3 і набагато сильніше ніж в інших породах залежить від пористості, а також від густини рідинної та газової фаз. Вплив цих чинників на осадові породи різного генезису відмінний – для уламкових порід визначальну роль відіграють гранулометричний склад, спосіб сполучення зерен і характер цементації, для колоїдогенних – діа- та епігенетичні перетворення тощо. Вплив пустотного заповнювача на величину густини контролюється величиною відкритої пористості.

Діагенетичні і катагенетичні перетворення осадових порід відбуваються під дією зростаючого геостатичного тиску, результатом чого є незворотне компресійне ущільнення. Відтак однотипні осадові утворення одного типу різних рівнів глибинності можуть суттєво відрізнятися за густиною. Найбільшого ущільнення зазнають пластичні глинисті породи, а найменшого – пісковики з жорстким кварцовим і карбонатним цементом.

В молодих глинистих осадках пористість складає 80%. Якщо пористість зменшується на 35-40 %, то густина збільшується до 1800-2080 кг/м^3. При значних навантаженнях і потужності перекриваючої товщи до 3000 м, густина аргілітів може складати 2400-2500 кг/м^3, подальше ущільнення можливе тільки при перекристалізації часток, які спостерігаються в глинистих сланцях.

Найбільші можливості до ущільнення мають глини. Піски та пісковики, на відміну від глин, більш різко реагують на літологічне

ущільнення. Добре відсортований пісок на дні водойми може мати пористість 40 %, яка на глибинах 1-1,5 км під дією навантаження вище залягаючих порід зменшується до 6-10% і, відповідно густина збільшується до 2400-2600 кг/м^3, на більших глибинах ущільнення і збільшення густини відбувається більш повільно.

Таблиця 5.3 – Мінеральна та об'ємна густина поширених осадових порід (в кг/м^3)

Порода	$\delta_{Mсер}$	$\delta_{M\ min}$ - $\delta_{M\ max}$	σ_{Omin}-σ_{Omax}	σ_O найпоширеніших відмін
Глина	2680	2580-2780	1200-2400	-
Аргіліт	2680	2600-2780	1700-2900	2300-2400
Глинистий сланець	2700	2650-2800	2300-3000	2400-2600
Пісок	2650	2560-2760	1300-2000	1500-1700
Алевроліт	2690	2620-2760	1800-2800	2300-2500
Піщаник	2670	2580-2760	2000-2900	2500-2600
Піщаний сланець	2710	2650-2900	2300-3000	2600-2700
Брекчія*			1600-3000	
Конгломерат*			2100-3000	
Мергель	2700	2580-2800	1500-2800	2200-2400
Вапняк	2720	2620-2800	1800-2900	2600-2700
Доломіт	2800	2760-2950	1900-3000	2600-2800
Крейда	2690	2560-2800	1200-2700	1500-2600
Гіпс	2370	2310-2480	2100-2500	2400-2500
Ангідрит	2960	2920-3000	2400-2900	2500-2600
Сіль кам'яна	2160	2120-2220	2200-2300	
Опока	2450	2200-2500	1000-1600	
Кремінь	2590	2450-2750	2300-2600	

Порода	$\delta_{Mсер}$	$\delta_{M\ min}$ - $\delta_{M\ max}$	σ_{Omin}-σ_{Omax}	σ_O найпоширеніших відмін
Вугілля		1200-1900	1100-1800	

Середня об'ємна густина порід нерідко зменшується к склепінню локальних позитивних структур, де зазвичай зменшується глинистість і збільшується відсортованість і пористість порід.

Перетворення карбонатних осадів в породу та їх ущільнення відбувається також при порівняно невеликих статичних тисках, на глибинах до 1 км густина вапняків і доломітів складає 2500-5600 кг/м^3. Густина карбонатних порід позитивних структур тісно пов'язана з їх положенням в самій структурі. Зазвичай в склепінні структури розвинуті переважно вапняки, а по направленню до крил зростає вміст доломітів, що і веде до збільшення густини. Зменшення густини до склепіння також пов'язано з збільшенням їх тріщинуватості (Кобранова В.Н., 1986).

Зростанню густини сприяють також утворення гематитового, сидеритового, піритового цементу, процеси дегідратації водовмісних мінералів.

Для гідрохімічних осадків діагенез не має сильного впливу, оскільки ці породи вже на стадії осадконакопичення характеризуються мінімальною пористістю, при діагенезі порід з глибиною відмічається підвищення густини з збільшенням віку порід.

Загальна закономірність зміни густини водонасичених ($\sigma_{вн}$) однотипних і одновікових порід із глибиною може бути виражена емпіричним рівнянням (М.Л.Озерська):

$$\sigma_{вн}=\delta_M+(1-\delta_M)\cdot K_{Пмакс}\cdot e^{-0,45H}),$$

де Н - глибина залягання порід,

$K_{Пмакс}$ - граничне значення коефіцієнту пористості при Н=0,

δ_M - мінеральна густина.

При інтерпретації петрогустинних даних слід враховувати також залежність густини від умов утворення і існування порід, вплив яких, як правило, найбільш чітко проявляється за рахунок зміни густини мінералів та пористості порід.

Вплив мінерального складу на об'ємну густину осадових порід, як вже вказувалося, не є основним. Але наявність акцесорних мінералів (сидериту, піриту тощо) підвищує густину на 100-200 кг/м^3 . Особливо це характерно для осадових утворень складчастих регіонів та областей сносу в платформному чохлі. Великий вплив на густину має тип цементу. Заміна глинистого цементу в пісковиках та конгломератах на карбонатний збільшує їх густину на 200 кг/м^3. В той же час наявність глинистого цементу в карбонатних породах знижує їх густину.

Таким чином, в осадових породах межі зміни густини в рамках навіть одного літологічного різновиду можуть бути доволі широкі. Наприклад група вапняків може містити 4-5 різновидів від вапняку рихлого з густиною 1800-2250 кг/м^3 до вапняку кристалічного з густиною 2700-2900 кг/м^3, а збагачення породи рудними мінералами призведе до ще одного збільшення густини навіть до 3500 кг/м^3

В результаті, дуже вірогідним є близькі за значеннями величини щільнісних параметрів в істотно відмінних (за складом, генезисом, структурою) породних відозмінах геологічних об'єктів. З іншого боку, частими є ситуації коли дуже близькі за складом і генезисом породи через другорядні відмінності (в тому числі викликані епігенетичними процесами), можуть істотно відрізнятись за величиною густини.

Знання щільнісних властивостей є необхідним для побудови петрогустинних моделей земної кори, мантії та Землі в цілому, моделювання геологічних процесів, підрахунку запасів корисних копалин, для планування і інтерпретації гравіметрії тощо.

ЛІТЕРАТУРА

1. ТОРГЕ В. Гравиметрия: Пер. с англ. — М., Мир, 1999. — 429 с.
2. HALL, D. H.: History of the earth sciences during the scientific and industrial revolutions. Elsevier Scient. Publ. Comp., Amsterdam-Oxford-New York 1976.
3. TODHUNTER, I.: A history of the mathematical theories of attraction and the figure of the earth. Macmillan and Co. 1873 (Dover Publ. Inc., New York 1962).
4. BATES, C. C., T. F. GASKELL, R. B. PRICE: Geophysics in the affairs of man. Pergamon Press, Oxford etc. 1982.
5. MESSERSCHMITT, J. B.: Die Schwerebestimmung an der Erdoberfläche. F. Vieweg u. Sohn, Braunschweig 1908.
6. Clairaut, A.C.: Theorie de la figure de la terre, tiree des principes de l'hydrostatique. Paris 1743. [Имеется перевод: Клеро А. Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики. - М.: Изд-во АН СССР, 1947.]
7. BOUGUER, P.: La figure de la terre déterminée par les observations environs de l'equateur. Paris 1749.
8. BORDA, J. C., CASSINI DE THURY J. D.: Expériences pour connaître la longeur du pendule, qui bat les secondes à Paris. Base du Système métrique décimal, T. III, Paris 1792.
9. KATER, H.: An account of experiments for determining the length of the pendulum vibrating seconds in the latitude of London. Phil. Trans. Roy. Soc., London, A 108, 33-102, 1818.
10. KATER, H.: An account of experiments for determining the variation in the length of the pendulum vibrating seconds, at the principal stations of the Trigonometrical Survey of Great Britain. Phil. Trans. Roy. Soc., London, A 109, 337-508/, 1819.
11. BESSEL, F. W.: Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels. Abh. Kgl. Preufi. Akad. d. Wiss. zu Berlin, math. Kl., Berlin 1828.
12. BESSEL, F. W.: Construction eines symmetrisch geformten Pendels mit reciproken Axen. Astronomische Nachr., Altona 30, 1-16, 1849.

13. LAPLACE, P. S.: Mécanique Céleste. Tome 2, livre III, 146-152, Paris 1799.
14. GAUSS C. F.: Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona durch Beobachtungen am Ramsdenschen Zenithsec- tor. Vandenhoeck u. Ruprecht, Göttingen 1828.
15. lLISTING, J. B.: Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Größe der Erde. Nachr. d. Kgl. Gesellsch. d. Wiss. und d. Georg-August-Universität, 33-98, Göttingen 1873.
16. SABINE, E.: An account of experiments to determine the figure of the earth by means of the pendulum vibrating seconds in different latitudes. London 1825.
17. AIRY, G. B.: On the computation of the effect of the attraction of mountain-masses, as disturbing the apparent astronomical latitude of stations in geodetic surveys. Phil. Trans. Roy. Soc., London, 145, 101-104,1855.
18. STERNECK, R. VON: Der neue Pendelapparat des k. u. k. Militär-Geographischen Institutes. Mitt d. K. K. Milit.-Geogr. Inst., VII, Wien 1887.
19. CAVENDISH, H.: Experiments to determine the density of the earth. Phil. Trans. Roy. Soc., London, 88, 469-526, 1798.
20. JOLLY, PH. VON: Die Anwendung der Waage auf Probleme der Gravitation. Ann. d. Physik 5, 112-134, 1878.
21. PRATT, J. H.: On the deflection of the plumb-line in India, caused by the attraction of the Himalaya Mountains and of the elevated regions beyond, and its modification by the compensating effect of a deficiency of matter below the mountain mass. Phil. Trans. Roy. Soc., London, 149, 745—778, 1859.
22. HELMERT, F.R.: die mathematischen und physikalischen Teorien in höheren Geodäsie. Teubner, Leipzig 1880/1884. (Nachdruck Minerva GmbH, Frankfurt a. M. 1962.) [Имеется перевод I тома: Гельмерт Ф.Р. Математические и физические теории высшей геодезии, т. I. — М.: Геодезиздат, 1962.]
23. HELMERT, F. R.: Die Schwerkraft im Hochgebirge, insbesondere in den Tyroler Alpen. Veröff. Kgl. Preuß. Geod. Inst., No. 1, Berlin 1890.
24. HELMERT, F. R.: Der normale Theil der Schwerkraft im Meeresniveau. Sitz. ber.Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss.sch. zu Berlin, 328-336, 1901.

25. EÖtvÖs, R. von: Untersuchungen über Gravitation und Erdmagnetismus. Ann. d. Physik 59, 354—400, 1896. [Имеется перевод: Этвеш Р. Опыты над тяготением и земным магнетизмом. Сб. рефератов и переводных статей по геодезическим вопросам. Приложение к ’’Запискам Военно-топографического управления Главного штаба”, ч. 63, С:Пб., Воен. тип., 1910, с.2-49.]
26. EÖtvÖs, R.von: Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveauflachen mit Hilfe der Drehwaage. Verh. D. XV allg. Konf. der Intern. Erdmessung 1906, Db. I, 337—395, Budapest 1908. [Имеется перевод: Этвеш Р. Определение градиентов силы тяжести и ее поверхностей уровня при помощи крутильных весов. Сб. рефератов и переводных статей по геодезическим вопросам. Приложение в ’’Записках Военно-топографического управления Главного штаба”, ч. 63, С-Пб., Воен. тип., 1910, 73-127.]
27. SCHWEYDAR, W.: Die Bedeutung der Drehwaage von Eotvös für die geologische Forschung nebst Mitteilung der Ergebnisse einiger Messungen. Z. f. prakt. Geologie 26, 157-162, 1918.
28. HERSCHEL, J.F.W.: A treasure on astronomy. Longman, London, 1833. [Имеется перевод: Гершель Дж. Очерки астрономии, т. I и И. - М., 1861—1862.]
29. ЖУРАВЛЕВ Н.Ф. Определение сжатия земного эллипсоида по измерениям силы тя- жести.-Тр. ГАИШ, т. 14, ч. 2, М., 1940.
30. HAYFORD, J. F.: The figure of the earth and isostasy from measurements in the United States. U.S. Coast and Geod. Survey, Washington, D. C. 1909. 278*HAYFORD, J. F., W. BOWIE: The effect of topography and isostatic compensation upon the intensity of gravity. U.S. Coast and Geod. Survey, Spec. Publ. No.10, Washington 1912.
31. BOWIE, W.: Investigations of gravity and isostasy. U.S. Coast and Geodetic Survey, Spec.Publ. No. 40, Washington 1917.
32. HEISKANEN, W. A.: Untersuchungen über Schwerkraft und Isostasie. Veröff.-Finn. Geod. Inst., No. 4, Helsinki 1924.
33. VENING-MEINESZ, F. A.: Une nouvelle méthode pour la réduction isostatique régionale de l’intensité de la pesanteur. Bull. Géod. No. 29, 33-51, 1931.
34. HEISKANEN, W. A.: Ist die Erde ein dreiachsiges Ellipsoid? Gerlands Beitr. z.Geophysik 19, 356-377, 1928.
35. PIZETTI, P.: Sulla eepressione della gravfta alia superficie del geoide, supposto ellissoidico. Atti R. Accad. Lincei, Ser. V, Vol. 3,

1894.
36. SOMIGLIANA, C.: Teoria generale del campo gravitazionale dell'elhsoide di ro- tazione. Mem. della Soc. Astron. ItaL, Vol. IУ, Milano 1929.
37. JEFFREYS, H.: An application of the free-air reduction of gravity. Gerlands Beitr. z. Geophysik 31, 378-386, 1931.
38. HIRVONEN, R. A.: The continental undulations of the geoid. Veroff. Finn. Geod. Inst., No. 19, Helsinki 1934.
39. NETTLETON, L. L.: Geophysical prospecting for oil. McGraw-Hill, New York, N.Y. 1940.
40. HAMMER, S.: Estimating ore masses in gravity prospecting. Geophysics 10, 50-62, 1945.
41. HAALCK, H.: Lehrbuch der angewandten Geophysik. Gebr. Bomtraeger, BerlinNikolassee 1953.
42. JUNG, K.: Schwerkraft verfahren in der angewandten Geophysik. Akad. Verlagsgesellschaft Geest u. Portig KG, Leipzig 1961.
43. GRAF, A.: Uber die bisherigen Erfahrungen und Meßergebnisse mit dem Seegravimeter. J. Geophys. 23, 4-25, 1957.
44. LACOSTE, L. J. B.: Surface ship gravity measurements on the Texas A and M College ship "Hidalgo". Geophysics 24, 309-322, 1959.
45. WOOLLARD, G. P.: The gravity meter as a geodetic instrument. Geophysics 15, 1-29, 1950.
46. HEISKANEN: W. A.: On the World Geodetic System. Veröff. Finn. Geod. Inst., Nr. 39, Helsinki 1951.
47. HEISKANEN: W. A.: The Columbus geoid. Trans. Am. Geophys. Union 38, 841-848, 1957.
48. TANNI, L.: On the continental undulations of the geoid as determined from the present gravity material. Publ. Isos tat. Inst, of I.A.G., No. 18, Helsinki 1948.
49. МОЛОДЕНСКИЙ М.С. Основные вопросы геодезической гравиметрии. Тр. ЦНИИГАиК. Вып. 42. М., Геодезиздат, 1945;
50. МОЛОДЕНСКИЙ М.С. Внешнее гравитационное поле и фигура физической поверхности Земли-Изв. АН СССР. Сер. географическая и геофизическая. Т. ХП, N* 3, 1948, с. 193-211.
51. HIRVONEN, R. A.: On the statistical analysis of gravity anomalies. Publ. Isostat. Inst. Int. Assoc. Geod., No. 37, Helsinki 1962.
52. MORITZ, H.: Interpolation and prediction of point gravity

anomalies. Publ. Isostat. Inst. Int. Assoc. Geod., No. 40, Helsinki 1963.
53. KRARUP, T.: A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy. Danish Geod. Inst., Medd. No. 44, Copenhagen 1969.
54. BJERHAMMAR, A.: A new theory of geodetic gravity. Trans. Roy. Inst. Techn. No. 243, Stockholm 1964.
55. GUILLET, A.: Mesure precise de l'accélération g de la chute des corps dans le vide. Comptes Rendus Acad. Sei. Paris 207, 614-616, 1938.
56. VOLET, CH.: Sur la mesure absolue de la gravité. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 222, 373-375, 1946.
57. FALLER, J. E., Y. G. Guo, J. GSCHWIND, T. M. NIEBAUER, R. L. RINKER, J. XUE: The JILA portable absolute gravity apparatus. BGI No. 53, 87-97, 1983.
58. SAKUMA, A.: État actuel de la nouvelle détermination absolue de la pesanteur au Bureau International des Poids et Mesures, Sèvres. Bull. Géod. No. 69, 249-260, 1963.
59. COOK, A. H.: The absolute determination of the acceleration due to gravity. Metrologia I, 84-rll4, 1965.
60. ДВУЛІТ П. Д. Місце геодезії та гравіметрії в комплексі наук про Землю // Геодинаміка 1(20)/2016
61. MORELLI, C.: Compensazione della rete intemazionale della stazione de riferimento per le misure di gravita relativa. Inst. Geofis. Publ. No. 211, Trieste 1946.
62. HIRVONEN, R. A.: On the establishment of the values of gravity for the national reference stations. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. H III, Geol. Geogr. 17, Helsinki 1948.
63. WOOLI.ARD, G. P., J. C. ROSE: International gravity measurements. S.E.G. Monogr., Univ. of Wisconsin, Geophys. and Polar. Res. Center, Madison, Wisconsin 1963.
64. KOZAI, Y.: The earth's gravitational potential derived from the motion of satellite 1958)32. Smithsonian Astrophysical Observatory, Research in Space Science, Spec. Rep. 22, 1959.
65. MERSON, R. H., D. G. KiNG-HELE: The use of artificial satellites to explore the earth's gravitational field; results from Sputnik 2 (1957/?). Nature 182, 640-641, 1958.
66. MARSH, J. G., S. VINCENT: Global detailed gravimetric geoid computation and model analysis. Geophys. Surveys 1, 481-511, 1974.

67. BOTT, M. H. P.: The use of rapid digital computing methods for direct gravity interpretation of sedimentary basins. Geophys. J. R. Astr. Soc. 3, 63-67, 1960.
68. TALWANI, M., M. EWING: Rapid computation of gravitational attraction of three dimensional bodies of arbitrary shape. Geophysics 25, 203-225, 1960.
69. BHATTACHARYYA, B. K.: Two-dimensional harmonic analysis as a tool for magnetic interpretation. Geophysics 30, 829-857, 1965.
70. TSUBOI, CH., T. FUCHIDA: Relations between gravity values and corresponding subterranean mass distribution. Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo Univ. 15, 636-649, 16, 273-284, 17, 351-384, 1937/1939.
71. SKEELS, D. C.: Ambiguity in gravity interpretation. Geophysics 12, 43-56, 1947.
72. MORELLI, C., C. GANTAR, T. HONKASALO, R. K. MCCONNELL, J. G. TANNER, B. SZABO, U. UOTILA, C. T. WHALEN: The International Standardization Net 1971 (ISGN71). I.U.G.G.-I.A.G.-Publ. Spec. No. 4, Paris 1974.
73. AGARWAL, G. C., C. S. JOSHI (eds.): National Report on the Geodetic and Gravimetric Work done in India 1983-86. Pres. XIX. Gen. Ass. I.U.G.G., Vancouver 1987.
74. ДВУЛІТ П. Д. Гравіметрична мережа України: сучасний стан і перспективи розвитку // Геодинаміка. - 2009. - № 1. - С. 44-46
75. КРЮКОВ О. М., Чинков В. М., Мірошниченко О. М., Сидоренко І. С. Стан та перспективи гравіметричного дослідження території України // Укр. Метрол. Журн. - 1998. - Вип. 3. - С. 42-45
76. ДВУЛІТ П. Д., ЕНТІН В. А., КУЧЕР О. В. Розвиток державної гравіметричної мережі України як пріоритетна складова програм із проблем мінерально-сировинного забезпечення країни, Мінеральні ресурси України // Науковий журнал. - К.: Укр. ДІРІ, 2010. - № 2. - С. 5-6.;
77. ДВУЛІТ П. Д., СМЕЛЯНЕЦЬ О. В. Завдання модернізації гравіметричної мережі України // Вісник геодезії та картографії. - К., 2013. - № 6. - С. 6-10
78. СТАРОСТЕНКО В.І. Визначення вертикальних похідних потенціалу притягання по результатах спостережень з горизонтальним градієнтометром, 1970

79. СТАРОСТЕНКО В.І. Стійкі чисельні методи в залачах гравіметрії, 1978
80. СТАРОСТЕНКО В.І., СОБАКАРЬ Г. Т. Неприпливні зміни сили тяжіння, 1982
81. СТАРОСТЕНКО В.І. Методика вирішення прямих задач гравіметрії та магнітометрії на кулеподібних планетах, 1986.
82. БУЛАХ Е. Г. Прямые и обратные задачи гравиметрии и магнитометрии. Математические методы геологической интерпретации гравиметрических и магнитометрических данных : монография / Е. Г. Булах; Ин-т геофизики им. С.И.Субботина НАН Украины. - К. : Наук. думка, 2010. - 463 с.
83. БУЛАХ Е. Г. Обратные задачи гравиметрии для совокупности шаровых тел / Е. Г. Булах, М. Н. Маркова // Геоінформатика. - 2006. - № 2. - С. 19-23.
84. БУЛАХ Е. Г. Обзор работ по методам минимизации в обратных задачах гравиметрии и магнитометрии / Е. Г. Булах // Геофиз. журн.. - 1999. - 21, № 4. - С. 5-19
85. БУЛАХ Е. Г Применение метода минимизации для решения задач структурной геологии по данным гравиразведки [Текст] : монография / Е. Г. Булах, В. А. Ржаницын, М. Н. Маркова ; АН УССР, Ин-т геофизики. - К. : Наукова думка, 1976. - 218, [2] с
86. ТЯПКИН О. К. Применение гравиразведки для оценки геолого-экологических последствий горнодобывающей деятельности / О. К. Тяпкин, В. П. Солдатенко // Геофиз. журн.. - 2000. - 22, № 1. - С. 21-30
87. ТЯПКИН О. К. Использование гравиразведки и магниторазведки в экологических исследованиях / О. К. Тяпкин // Геофиз. журн.. - 2002. - 24, № 2. - С. 71-78.
88. БІЛОГАН Г. Р. Про розв'язування спеціальної оберненої гравіметричної задачі / Г. Р. Білоган // Вісн. астрон. шк.. - 2000. - 1, № 1. - С. 79-81. - Бібліогр.: 4 назв. - укр.
89. ПЕТРОВСКИЙ А. П. Информационное обеспечение и модельные представления интегральной интерпретации геолого-геофизических данных при изучении нефтегазоносных структур / А. П. Петровский // Геофиз. журн.. - 2004. - 26, № 3. - С. 77-86.
90. СВЕТЛОВ С.М. Методы анализа и снижения динамических погрешностей баллистических гравиметров: Дис... канд. техн. наук:

05.11.15 / Харьковский гос. НИИ метрологии (ХГНИИМ). - Х., 2000. - 172л.
91. БАЛК П. И. Метод минимизации риска для решения обратных задач гравиразведки при слабых предположениях о свойствах геологических помех / П. И. Балк, А. С. Долгаль // Геофиз. журн.. - 2016. - 38, № 5. - С. 108-118.
92. ЯКИМЧУК Н. А. Пространственное восстановление гравитационных и магнитных полей для дистанционных исследований Земли [Текст] : дис... д-ра физ.- мат. наук: 04.00.22 / Якимчук Николай Андреевич ; Институт бизнеса, менеджмента и переподготовки кадров Госкомгеологии Украины. - К., 1997. - 345 с
93. ЖУРАВЛЕВА О.И. Методы решения обратных задач структурной гравиметрии на основе равномерных критириев оптимальности [Текст] : дис... канд. физ.-мат. наук: 01.04.12 / Журавлева Ольга Игоревна ; Ивано-Франковский гос. технический ун-т нефти и газа. - Ивано-Франковск, 1996. - 185 л.
94. КИШМАН-ЛАВАНОВА Т.М. Прямі та обернені задачі гравіметрії в класі блочно побудованих геологічних моделей [Текст] : дис... канд. фіз.-мат. наук: 04.00.22 / Кишман-Лаванова Тамара Миколаївна ; НАН України, Ін-т геофізики ім. С. І. Субботіна. - К., 2008. - 139 арк
95. АНИКЕЕВ С. Г. Методика интерпретации гравиметрических материалов при произвольном строении геологических сред [Текст] : дис... канд. геол. наук: 04.00.22 / Аникеев Сергей Григорьевич ; Ивано-Франковский гос. технический ун-т нефти и газа. - Ивано-Франковск, 1999. - 242 л. -
96. ДЕНИСЮК Р. П. Плотностное моделирование различных типов геологических структур на основе созданной системы решения обратных задач гравиметрии [Текст] : дис... д-ра геол. наук: 04.00.22 / Денисюк Ростислав Павлович ; Ивано-Франковский гос. технический ун-т нефти и газа. - Ивано-Франковск, 1999. - 350 л
97. ТРОЙНІЧ К. С. Комплексна інверсія даних сейсмо- та гравірозвідки методом одночасної ітеративної реконструкції [Текст] : автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 04.00.05 / Тройніч Костянтин Сергійович ; Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. - Київ, 2016. - 20 с
98. ГРАВІМЕТРІЯ. Підручник/ Двуліт П.Д.- Львів. ЛАГТ, 1998.-196с.

99. КАУФМАН А.А., ХАНСЕН Р. Принципы метода гравиметрии / Пер. с англ. – Междунар. Ассоц. «АИС», 2011, 376 с.
100. SJOBERG en W. A., MORITZ H.: Physical geodesy. W. H. Freeman and Co., San Francisco and London 1967.
101. BLAKELY R. Potential Theory in Gravity and Magnetic Application, Cambridge University Press. 1996
102. GROTEN E.: Geodesy and the earth's gravity field. F. Diimmler, Bonn 1979/1980
103. БЕЗРОДНИЙ Д., КУЛІНІЧ Ю. Аналітична апроксимація геопотенціального поля методом Квадрадерева // Матеріали конференції «Xth Interna-tional Conference on Geoin-formatics - Theoretical and Applied Aspects», 2011., Ел. ресурс S145
104. HEISKANEN W. A., MORITZ H.: Physical geodesy. W. H. Freeman and Co., San Francisco and London 1967.
105. MORITZ, H.: Geodetic Reference System 1980. In: C. C. Tscherning (ibl.), The Geodesist's Handbook 1984 -Bull. Geod. 58, 388-398, 1984.
106. БЕЗРОДНИЙ Д., ЛУГОВСЬКА Н. Використання горизонтального градієнту сили тяжіння при вивченні геометрії геологічних об’єктів Матеріали конференції «Xth International Conference on Geoinformatics - Theoretical and Applied Aspects», 2011. Електронний ресурс S144
107. PIZETTI, P.: Sulla espressione della gravita alla superficie del geoide, supposto ellissoidico. Atti R. Accad. Lincei, Ser. V, Vol. 3, 1894.
108. TORGE, W. Das Schweregrundnetz 1976 der Bundesrepublik Deutscbland (DSGN76). ZfV 105, 454-57, 1980.
109. ГРУШИНСКИЙ Н.П. Основы гравиметрии. М., Наука, 1983
110. ДВУЛІТ П.Д. Гравіметрія / Підручник. Львів, ЛАГТ, 1998. 196 с.
111. ПРИЛУКОВ В.В. Алгоритмічний та програмний розв’язок прямих та обернених задач гравіметрії та магнітометрії у класі тіл, що задані горизонтальними пластинами : Дис... канд. наук: 04.00.22 - 2007.
112. БРОВАР В В Гравитационное поле в задачах инженерной геодезии – М., Недра, 1981
113. KING, R. W., MASTERS E. G., RIZOS C., STOLZ A., COLLINS J.: Surveying with Global Positioning System-GPS. F. Diimmler, Bonn 1987

114. SJOBERRG L. E. Integral formulas for heterogeneous data in physical geodesy. Bull. Geod. 53, 297-315, 1979.
115. EDERSEN L. B.: Constrained inversion of potential field data. Geophys. Prosp. 27, 726-748, 1979a.
116. ЗАГРЕБИН Д. В. Введение в теоретическую гравиметрию. Л., Наука, 1976
117. МИРОНОВ В С Курс гравиразведки // Л Недра 1980
118. МУДРЕЦОВА Е А, Веселов К Е Гравиразведка / Справочник геофизика // М Недра, 1990
119. ОГОРОДОВА Л В . ШИМБИРЕВ Б П , ЮЗЕФОВИЧ А П Гравиметрия // М., Недра. 1978
120. ЦУБОИ Т. Гравитационное поле Земли // М Мир, 1982
121. ШИМБИРЕВ Б П Теория фигуры Земли // М Недра, 1975
122. BARLIK M. PACHUTA A , PRASZYNSKA-WOJCIECHEWSKA M. Cwiczenu geodezji fizycnej i grawimetrii // Warszawa, 1992
123. БЕЗРОДНА І.М. Посібник з лабораторного практикуму з курсу «Петрофізика» // http://www.geol.univ.kiev.ua/lib/lab_Petrophysics.pdf