

7. Фільтрація випадкових функцій. Спектральні відображення

7.1. Випадкові функції. Поняття про лінійний фільтр

Універсальною моделлю поля спостережень величини, яка реєструється при різних значеннях аргументу, є випадкова функція. *Випадковою функцією* $\xi(x)$ називається неперервно змінна випадкова величина, яка залежить від неперервно змінного параметра x . Спостереженням випадкової функції є звичайна функція, яка називається *реалізацією* випадкової функції. Реалізації варіюють від досліду до досліду. Без досліду реалізацію точно передбачити неможливо. При кожному значенні x величина $\xi(x)$ є випадковою. Набір значень $\xi(x_1), \xi(x_2), \dots, \xi(x_m)$ при довільних x_1, x_2, \dots, x_m утворює m -вимірну випадкову величину. Якщо аргумент випадкової функції – час t , то її називають *випадковим процесом*, а якщо аргументів більше одного – то *випадковим полем*.

Основними характеристиками випадкової функції є математичне сподівання $m(x) = \mathbf{M}\xi(x)$ та *кореляційна функція*. Кореляційна функція випадкової функції $\xi(x)$ – це функція $r(x, y)$, що при довільних x та y є коваріацією величин $\xi(x)$ і $\xi(y)$: $r(x, y) = \mathbf{M}(\xi(x) - m(x))(\xi(y) - m(y))$; $r(x, y)$ ще називають *автокореляційною функцією*.

Радіус (або *інтервал автокореляції*) – це мінімальне значення τ_0 , при якому, незалежно від x , величини $\xi(x)$ і $\xi(x + \tau_0)$ – некорельовані.

Взаємна кореляційна функція двох випадкових функцій $\xi(x)$ та $\eta(y)$ – це функція двох змінних x та y , що при довільних x та y є коваріацією величин $\xi(x)$ та $\eta(y)$: $r_{\xi\eta}(x, y) = \mathbf{M}(\xi(x) - \mathbf{M}\xi(x))(\eta(y) - \mathbf{M}\eta(y))$.

Якщо при кожному наборі аргументів x_1, x_2, \dots, x_m m -вимірною величиною $\{\xi(x_1), \xi(x_2), \dots, \xi(x_m)\}'$ має багатовимірний нормальний (гауссівський) розподіл, то випадкова функція $\xi(x)$ називається *гауссівською*. Якщо математичне сподівання випадкової функції є сталим, тобто

$$\mathbf{M}\xi = m = \text{const}, \quad (7.1)$$

а її випадкова функція залежить тільки від різниці аргументів $\tau = y - x$:

$$r(x, y) = r(\tau) = \mathbf{M}(\xi(x + \tau) - m)(\xi(x) - m), \quad (7.2)$$

то така випадкова функція називається *стаціонарною у широкому розумінні*¹. Кореляційна функція стаціонарної випадкової функції є парною:

$$r(\tau) = r(-\tau); \quad (7.3)$$

значення $r(0)$ є дисперсією $\xi(x)$:

$$r(0) = \mathbf{D}\xi(x). \quad (7.4)$$

Функція $r(\tau)$ – коваріація значень випадкової функції, що спостерігаються на відстані τ одне від одного вздовж осі Ox . У радіотехнічних застосуваннях $\mathbf{M}\xi(x)$ називають потужністю випадкового процесу, а $\mathbf{D}\xi(x)$ – потужністю його змінної складової.

Нормована кореляційна функція

$$r_N(\tau) = r(\tau)/r(0) \quad (7.5)$$

описує залежність від τ коефіцієнта кореляції (автокореляції).

Стаціонарна випадкова функція називається *ергодичною*, якщо її характеристики (математичне сподівання, кореляційну функцію) можна дістати усередненням за аргументом:

$$m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(x) dx, \quad r(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T+\tau} (\xi(x+\tau) - m)(\xi(x) - m) dx.$$

Ця важлива властивість дає можливість за однією реалізацією діставати статистичні оцінки та висновки, які є слушними для всієї множини реалізацій, якщо тільки довжина T інтервалу спостережень досить велика.

Якщо аргументом випадкової функції є час, то вона називається *випадковим процесом*.

Стаціонарний випадковий процес називається *марковським*, якщо його кореляційна функція має вигляд: $r(\tau) = \sigma^2 e^{-\lambda|\tau|}$.

¹ Величина $\xi(x)$ цілком стаціонарна, якщо при довільних x_1, x_2, \dots, x_n багатовимірний розподіл $\xi(x_1), \xi(x_2), \dots, \xi(x_n)$ не змінюється від додавання до кожного аргументу довільного τ .

7. Фільтрація випадкових функцій. Спектральні відображення

Випадкова функція називається *некорельованою*, якщо $r(\tau) = 0$ при $\tau \neq 0$.

Якщо від випадкової функції $\xi(x)$ відняти її математичне сподівання, то отримана випадкова функція матиме нульове математичне сподівання: $\mathbf{M}(\xi(x) - m(x)) = 0$. Отже,

$$\xi(x) = m(x) + \delta(x), \quad (7.6)$$

де $\delta(x)$ – випадкова функція з нульовим математичним сподіванням.

За відсутності об'єкта або впливу на спостережувану випадкову функцію $\xi(x)$ різниця $\xi(x) - m(x) = \delta(x)$ служить випадковим фоном, який у теорії фільтрації зветься *завадою*. Завада, як правило, вважається стаціонарною. Функція $m(x)$ описує невідповідний фон спостережуваної величини. Якщо об'єкт пошуку впливає на $\xi(x)$, то це веде до появи *корисного сигналу* $S(x)$:

$$\xi(x) = m(x) + \delta(x) + S(x), \quad (7.7)$$

який може, залежно від прийнятої моделі, розглядатися як детермінований ($S(x)$ – невідповідна функція) або випадковий ($S(x)$ – випадкова функція).

Статистичні висновки про випадкову функцію можна дістати за вибіркою її реалізацій, а якщо вона ергодична – то за однією реалізацією $\xi(x)$ або за значеннями $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ однієї реалізації, які задано в дискретних точках x_1, x_2, \dots, x_n : $\xi_j = \xi(x_j), j = 1, 2, \dots, n$. Відстань між сусідніми пунктами спостережень $\Delta = x_{i+1} - x_i$ називається *кроком спостережень*. Якщо крок не менше радіуса автокореляції, то значення реалізації, які дістали з цим кроком, будуть некорельованими.

Оцінка математичного сподівання стаціонарної випадкової функції за однією реалізацією буде

$$\tilde{m} = \sum_{i=1}^n \xi_i / n. \quad (7.8)$$

Усередненням таких оцінок дістають оцінку математичного сподівання за кількома реалізаціями. Оцінку кореляційної функції обчислюють за значеннями $y_i = \xi_i - \tilde{m}$, зведеними до нульового фону:

$$\tilde{r}(l\Delta) = \frac{1}{n-l} \sum_{i=1}^{n-l} y_{i+l} y_i, \quad l = 0, 1, \dots, L. \quad (7.9)$$

При необхідності оцінку усереднюють за кількома реалізаціями. $L = [\tau_0/\Delta] + 1$, $[\tau_0/\Delta]$ – ціла частина відношення радіуса автокореляції до кроку спостережень. Оцінка нормованої кореляційної функції

$$r^{(N)}(l\Delta) = \tilde{r}(l\Delta) / \tilde{r}(0). \quad (7.10)$$

Радіус автокореляції оцінюють як $\tilde{\tau}_0(\varepsilon) = l_0\Delta$, де l_0 – найбільше l , при якому $|r^{(N)}(l\Delta)| \leq \varepsilon$. На практиці ε покладають 0,1–0,3.

Оцінка взаємної кореляційної функції $(j + p)$ -го ряду зведених до нульового фону спостережень $\{y_i^{(j)}\}$ відносно j -го $\{y_i^{(j)}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} r_{j,j+p}(l\Delta) &= \frac{1}{n-l} \sum_{i=1}^{n-l} y_i^{(j)} y_{i+l}^{(j+p)} \quad (l \geq 0), \\ r_{j,j+p}(l\Delta) &= \frac{1}{n-|l|} \sum_{i=1}^{n-|l|} y_{i+l}^{(j)} y_i^{(j+p)} \quad (l < 0), \\ r_{j,j+p}^{(N)}(l\Delta) &= r_{j,j+l}(l\Delta) / (\sigma_j \sigma_{j+p}). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Аргумент $l\Delta$ взаємної кореляційної функції – це зсув $(j + p)$ -го ряду відносно j -го. Оцінка за кількома парами профілів, що віддалені один від одного на відстань ph (h – відстань між сусідніми профілями), служить одночасно оцінкою двовимірної кореляційної функції випадкового поля:

$$R(l\Delta, ph) = \frac{1}{n-p} \sum_{j=1}^{n-p} r_{j,j+p}(l\Delta) = \bar{r}_p(l\Delta) \quad (h \geq 0), \quad (7.12)$$

$$R(l\Delta, ph) = R(-l\Delta, -ph) \quad (h < 0), \quad R^{(N)}(l\Delta, ph) = R(l\Delta, ph) / R(0, 0).$$

Значення $\tau_0 = l_0\Delta$, при якому $r_{j,j+p}(\tau)$ максимальне, показує переважний зсув корельованих аномалій у $(j + p)$ -му ряді відносно j -го. Міжпрофільна кореляція з урахуванням цього зсуву підсилює ефект фільтрації.

Лінійний фільтр у випадку детермінованого сигналу. *Задача фільтрації* полягає в перетворенні однієї або кількох реалізацій випадкової функції для оцінки сигналу з найменшою похибкою. Перетворення, яке використовується для фільтрації, називається *фільтром* (або *оператором фільтра*). Якщо воно лінійне, то фільтр називається *лінійним*. Результат перетворення називається *відгуком фільтра*. У практиці обробки даних застосовують, як правило, лінійні фільтри, для яких розроблено зручний математичний апарат.

Фільтрацію починають зі зведення спостережуваної випадкової функції $\xi(x)$ до нульового математичного сподівання (нульового фону). Далі розглядають реалізації $y(x)$ випадкової функції $\xi(x) - m(x)$, яка за відсутності сигналу має нульове математичне сподівання. Реалізація $y(x)$ – це так званий вхідний сигнал. Вважається, що положення локального об'єкта пошуку (аномалії) визначається абсцисою x_0 точки максимуму корисного сигналу (рис. 7.1).

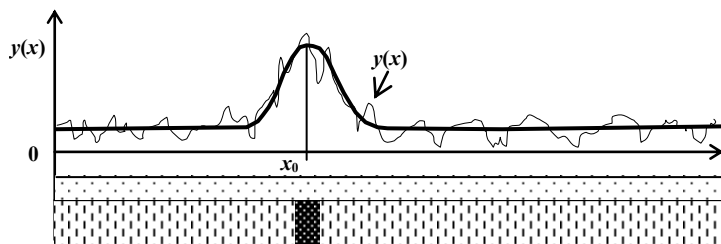


Рис. 7.1. Реалізація $y(x)$ випадкової функції $\xi(x) - m(x)$ за наявності детермінованого корисного сигналу

Лінійний фільтр за неперервною реалізацією у точці x_j має вигляд

$$Z(x_j) = \int_a^b h(x_j, x)y(x)dx,$$

де (a, b) – інтервал спостереження реалізації $y(x)$; $h(x_j, x_0)$ – вагова функція. Якщо реалізацію задано лише у n дискретних точках зі сталим кроком Δ , то лінійний фільтр має вигляд

$$Z(x_0) = \sum_{i=1}^n h_i(x_0)y_i, \quad (7.13)$$

де $h_1(x_0), h_2(x_0), \dots, h_n(x_0)$ – вагові коефіцієнти, які залежать від x_0 та від того, який сигнал підлягає виділенню в результаті фільтрації; y_1, y_2, \dots, y_n – значення реалізації, зведеної до нульового середнього. Зведення до нульового середнього проводиться відніманням від значень реалізації оцінки математичного сподівання. Останню дістають, наприклад, за МНК як оцінку регіонального фону. Для стаціонарної випадкової функції її можна дістати за спостереженнями, які апіорі не містять сигналу.

Як правило, відгук обчислюють для значень $x_0 = x_j$, які належать множині пунктів спостережень $x_j \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. При цьому вагові коефіцієнти $h_i(x_j)$ залежать лише від різниці $(j - i)$. $h_i(x_j) = h_{j-i}$, а h_{j-i} дорівнюють нулю для значень $j - i$, які перебувають поза певним інтервалом: $l_1 \leq j - i \leq l_2$. Формула для відгуку в точці x_j має вигляд

$$Z_j = \sum_{i=j+l_1}^{j+l_2} h_{j-i}y_i = \sum_{i=-l_1}^{-l_2} h_i y_{j-i}. \quad (7.14)$$

Використовуючи позначення $c_i = h_{-i}$, формулу можна записати у вигляді

$$Z_j = \sum_{i=l_1}^{l_2} c_i y_{j+i}, \quad (7.15)$$

де, на відміну від (7.14), коефіцієнти c_i та значення реалізації y_{j+i} при підсумуванні перелічуються в тій самій послідовності. Фільтрація всього ряду,

який складається зі спостережень y_1, y_2, \dots, y_n , виконується при послідовно змінюваних значеннях j способом ковзного інтервалу, який переміщується після обчислення чергового відгуку на крок Δ уздовж осі абсцис. Довжина інтервалу не перевищує ширини сигналу, тобто області, де він не дорівнює нулю. При розрахунках зручно користуватися формулою

$$Z_j = \sum_{i=1}^k c_i y_i^{(j)}, \quad (7.16)$$

де k – кількість пунктів спостережень, що охоплюються інтервалом; $y_i^{(j)}$ – значення реалізації в точках, які потрапили до інтервалу в його j -му положенні:

$$y_i^{(1)} = y_i, \quad y_i^{(j)} = y_{i+j-1} \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (7.17)$$

Обчислене значення відносять до точки x_j , положення якої відносно інтервалу визначається особливостями фільтра. Зазвичай x_j позначає точку, яка випадає на середину інтервалу, рідше – на один з його кінців. У випадку відсутності корисного сигналу математичне сподівання відгуку дорівнює нулю:

$$\mathbf{M}_0 Z_j = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{M} y_i^{(j)} = 0, \quad (7.18)$$

оскільки спостереження $y_i^{(j)}$ наперед зведені до нульового фону.

За наявності детермінованого корисного сигналу, який відображається в інтервалі фільтрації ординатами S_1, S_2, \dots, S_k перевищення над фоном, математичне сподівання відгуку має вигляд

$$\mathbf{M}_1 Z_j = \sum_{i=1}^k c_i S_i = \vec{c}' \vec{S}. \quad (7.19)$$

Дисперсія відгуку виражається через кореляційну функцію стаціонарної завади за формулою

$$\mathbf{D} Z_j = \sum_{l,i=1}^k c_i c_l r(|i-l|\Delta). \quad (7.20)$$

Якщо \mathbf{B} – коваріаційна матриця k -вимірної величини $\{y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, \dots, y_k^{(j)}\}'$ (вона не залежить від j у зв'язку зі стаціонарністю завади), то

$$\mathbf{D} Z_j = \vec{c}' \mathbf{B} \vec{c} = \sum_{l,i=1}^k c_i b_{il} c_l, \quad (7.21)$$

7. Фільтрація випадкових функцій. Спектральні відображення

де $\bar{c} = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}'$ – вектор коефіцієнтів; $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$ – коваріаційна матриця завади; $b_{il} = r(|i-l|\Delta)$ – коваріація значень завади, які спостерігаються на відстані $|i-l|\Delta$ одне від одного. Якщо спостереження завади некорельовані, то

$$\mathbf{DZ}_j = \sigma^2 \sum_{i=1}^k c_i^2, \quad (7.22)$$

де σ^2 – дисперсія завади.

Задачі для самостійного розв'язання

7.1. Нехай $r(x)$ – кореляційна функція випадкової завади; $r(0) = 100$, $r(\Delta) = 50$. Чому дорівнює с.к.в. завади; коефіцієнт автокореляції завади на відстані Δ ?

7.2. Кореляційна функція стаціонарної випадкової функції $\xi(x)$ має вигляд $r(\tau) = ce^{-\lambda\tau}$. Визначити дисперсію та нормовану кореляційну функцію.

Відповідь: $\mathbf{D}\xi(x) = c$, $r_N(\tau) = e^{-\lambda\tau}$.

7.3. Кореляційна функція стаціонарної випадкової функції $\xi(x)$ має вигляд $r(\tau) = ce^{-\lambda\tau}$. Визначити мінімальне значення d , при якому коефіцієнт кореляції між $\xi(x)$ і $\xi(x+d)$ не буде перевищувати ε ($0 < \varepsilon < 1$).

Відповідь: $d_{\min} = -(\ln\varepsilon)/\lambda$.

7.4. За спостереженнями магнітного поля, які дістали з кроком 20 м, визначено оцінки значень кореляційної функції: $\tilde{r}(0) = 500$, $\tilde{r}(20) = 220$, $\tilde{r}(40) = 90$, $\tilde{r}(60) = 50$; $|\tilde{r}(20l)| < 40$ для $l = 4, 5, \dots$. Оцінити радіус автокореляції, якщо рівень $\varepsilon = 0,1$.

Відповідь: $\tilde{\tau}_0(0,1) = 60$ м.

7.5*. Нормована кореляційна функція середньорічних рівнів ґрунтових вод $r_M(1) = 0,85$, $r_M(2) = 0,6$, $r_M(3) = 0,4$; при $\tau \geq 4$ $r_M(\tau) = 0$ (час у роках); дисперсія $\sigma^2 = 1$ м². Визначити с.к.в. середнього арифметичного, яке обчислюють за 20 значеннями середньорічних рівнів за 20 років.

Відповідь: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{n} \sqrt{n + 2(n-1)r_N(1) + 2(n-2)r_N(2) + 2(n-3)r_N(3)} \approx 0,468$

7.6. Перетин фізичного поля за профілем є випадковою функцією вигляду $\xi(x) = \xi_p(x) + \xi_a(x) + \Delta(x)$, де $\xi_p(x)$, $\xi_a(x)$ – випадкові функції, які описують заваду та аномалію, що мають кореляційні функції $r_p(\tau)$ та $r_a(\tau)$; $\Delta(x)$ – випадкова похибка виміру з нульовим математичним сподіванням і дисперсією D . Вважаючи $\xi_a(x)$, $\xi_p(x)$ і $\Delta(x)$ взаємно некорельованими, а $\Delta(x_1)$ та $\Delta(x_2)$ незалежними при будь-яких $x_1 \neq x_2$, визначити кореляційну функцію $\xi(x)$.

Відповідь:
$$r(\tau) = \begin{cases} r_p(\tau) + r_a(\tau) & \text{при } \tau > 0, \\ r_p(\tau) + r_a(\tau) + D & \text{при } \tau = 0. \end{cases}$$

7.7. Нехай $y(x)$ – неперервна реалізація випадкової функції, яка має кореляційну функцію $r(\tau)$. Відгук фільтра обчислюється у вигляді

$$Z = \int_a^b h(x)y(x)dx.$$

Довести, що
$$\mathbf{D}Z = \int_a^b \int_a^b h(u)h(v)r(v-u)dvdu.$$

7.8. Реалізацію випадкової функції після зведення її до нульового середнього задано значеннями 1; 0,5; -0,5; 2; 1. Фільтр має вигляд $Z_j = \sum_{i=-1}^1 c_i y_{i+j}$ з ваговими коефіцієнтами $c_{-1} = 0,5$, $c_0 = 1$, $c_1 = 0,5$. Обчислити відгук фільтра в точках x_2, x_3, x_4, x_5 .

Відповідь: $Z_2 = 0,75$, $Z_3 = 0,25$, $Z_4 = 1,75$, $Z_5 = 3$.

7.9. Виходячи з припущення форми сигналу та його ширини, за чотирма кроками за профілем розраховано коефіцієнти фільтра: $c_1 = c_5 = 0,006$, $c_2 = c_4 = 0,24$, $c_3 = 0,4$. Обчислити відгуки фільтрів для ряду геохімічних спостережень

10	12	10	7	8	10	11	10	12	16	20	15	11
9	10	11	6	10	11	7	11	14	16	13	9	10

та нанести обчислені значення на графік.

Відповідь: 9,64; 8,44; 8,56 і т. д. У кінці – 12,8.

7.10. Вагові коефіцієнти фільтра $Z_j = \sum_{i=1}^4 c_i y_i^{(j)}$ для фільтрації зведених до нульового фону спостережень дорівнюють: 1; 2; 2; 1. Завада некорельована й має дисперсію D . Визначити математичне сподівання та дисперсію відгуку фільтра:

- 1) за відсутності корисного сигналу;
- 2) за наявності детермінованого корисного сигналу вигляду $0,5a; a; a; 0,5a$.

Відповідь: 1) $\mathbf{M}_0Z = 0$; $\mathbf{D}_0Z = 10D$; 2) $\mathbf{M}_1Z = 5a$; $\mathbf{D}_1Z = 10D$.

7.11. Вагові коефіцієнти фільтра $Z_j = \sum_{i=1}^3 c_i y_i^{(j)}$ для фільтрації зведених до

нульового фону спостережень дорівнюють c_1, c_2, c_3 . Крок спостережень – Δ , дисперсія завади – σ^2 ; коефіцієнт кореляції між спостереженнями поля, які знаходяться на відстані Δ , дорівнює r_1 , а на відстані 2Δ – r_2 . Визначити дисперсію відгуку фільтра.

Відповідь: $DZ_j = \sigma^2(c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2r_1 + 2c_3c_2r_1 + 2c_1c_3r_2)$.

7.12. Для фільтрації результатів каротажу свердловини використовують показники Y_1, Y_2, \dots, Y_m за m геофізичними методами. С.к.в. завод для них дорівнюють відповідно $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$. Коефіцієнти кореляції між заводами за j -м та i -м методами – r_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, m$). Визначити с.к.в. відгуку фільтра

вигляду: $Z = \sum_{j=1}^m c_j Y_j$.

Відповідь: $DZ = \sum_{j=1}^m c_j^2 \sigma_j^2 + 2 \sum_{i < j} c_i c_j \sigma_i \sigma_j r_{ij}$.

7.13*. Стаціонарне гауссівське фізичне поле подане значеннями $\bar{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}'$ у n точках, \mathbf{B} – їхня коваріаційна матриця. Показати, що максимальна правдоподібна оцінка математичного сподівання поля має вигляд $\bar{m} = (\bar{y}' \mathbf{B}^{-1} \bar{y}) / (\bar{e}' \mathbf{B}^{-1} \bar{e})$, де $\bar{e} = \{1, 1, \dots, 1\}$.

7.14*. Результат ξ_i спостереження в i -му пункті має вигляд $\xi_i = m_i + \delta_i + \Delta_i$, де δ_i і Δ_i – випадкові завада та похибка виміру, які мають нульові математичні сподівання та дисперсії D_δ, D_Δ ; m_i – невідповідна складова поля. Заваду пригнічують усередненням результатів, які дістають у K точках, що віддалені одна від одної не менше ніж на радіус автокореляції завади. Кожний із K результатів, у свою чергу, отримують усередненням l кратних незалежних вимірів.

Перший вимір в i -й точці коштує $C_\delta + C_\Delta$, а кожний наступний в тій самій точці – C_δ . Визначити оптимальні K та l за умови, що на один пункт спостережень сума витрат має становити C . Визначити мінімальне значення D_{\min} дисперсії $D\bar{\xi}_i$ за цієї умови.

Вказівка. Мінімізувати дисперсію результату усереднення $D\bar{\xi}_i = D_\delta / K + D_\Delta / (Kl)$ за умови $C_\delta K + KlC_\Delta = C$.

$$\text{Відповідь: } l = \left\{ \sqrt{\frac{D_{\Delta} C_{\delta}}{D_{\delta} C_{\Delta}}} \right\}, \quad K = \left\{ \frac{C \sqrt{D_{\delta} / C_{\delta}}}{\sqrt{C_{\delta} D_{\delta}} + \sqrt{C_{\Delta} D_{\Delta}}} \right\} \text{ (округлити до цілого за}$$

умови $K \geq 1, l \geq 1$). $D_{\min} = (\sqrt{C_{\delta} D_{\delta}} + \sqrt{C_{\Delta} D_{\Delta}})^2 / C$.

7.15*. В умовах попередньої задачі визначити оптимальні K та l , якщо дисперсія відхилення результату усереднення від m_i у i -й точці має дорівнювати D . Визначити мінімальні витрати на один пункт спостережень за цієї умови.

Вказівка. Мінімізувати витрати $C = C_{\delta} K + K l C_{\Delta}$ за умови $D_{\delta} / K + D_{\Delta} / (K l) = D$.

$$\text{Відповідь: } l = \left\{ \sqrt{\frac{C_{\delta} D_{\Delta}}{C_{\Delta} D_{\delta}}} \right\}, \quad K = \left\{ \frac{\sqrt{D_{\delta} / C_{\delta}}}{D (\sqrt{D_{\delta} C_{\delta}} + \sqrt{D_{\Delta} C_{\Delta}})} \right\} \text{ (округлити до цілого}$$

за умови $K \geq 1, l \geq 1$). $C_{\min} = (\sqrt{D_{\delta} C_{\delta}} + \sqrt{C_{\Delta} D_{\Delta}})^2 / D$.

7.2. Фільтрація детермінованого сигналу за максимумом відношення сигнал/завада

Відношення сигнал/завада. Для фільтрації одних і тих самих спостережень можна запропонувати багато різних лінійних фільтрів. Виникає задача побудови оптимального фільтра. Вона розв'язується на основі критерію максимуму відношення сигнал/завада. Вважається відомою, принаймні з точністю до сталого множника a , форма детермінованого сигналу:

$$S(x - x_j + b) = a S_e(x - x_j + b), \quad (7.23)$$

де функція $S_e(u)$ описує сигнал одиничної амплітуди:

$$\max_u S_e(u) = 1; \quad (7.24)$$

x_j – точка, яка визначає положення границі області T_j сигналу (рис. 7.2); b – різниця між x_j та лівою границею T_j .

Після зведення до нульового фону реалізація випадкової функції, яка підлягає фільтрації, має вигляд

$$y(x) = \delta(x) + S(x - x_j + b), \quad (7.25)$$

7. Фільтрація випадкових функцій. Спектральні відображення

де $\delta(x)$ – випадкова завада з нульовим математичним сподіванням. Фільтрація проводиться за значеннями y_1, y_2, \dots, y_n реалізації, які дістали зі сталим кроком Δ . Оптимальні вагові коефіцієнти фільтра визначаються значеннями S_1, S_2, \dots, S_k :

$$\xi_i = S(i\Delta) = aS_i^{(l)} \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (7.26)$$

які задаються формою сигналу; $S_i^{(l)} = S_i(i\Delta)$ ($i = 1, 2, \dots, k$), причому $\max_{i=1, n} S_i^{(l)} = 1$. У (7.26) a – амплітуда сигналу, тобто його максимальне перевищення над фоном. Фільтр будується з таким розрахунком, щоб за максимальним значенням відгуку визначити положення x_j сигналу (рис. 7.2).

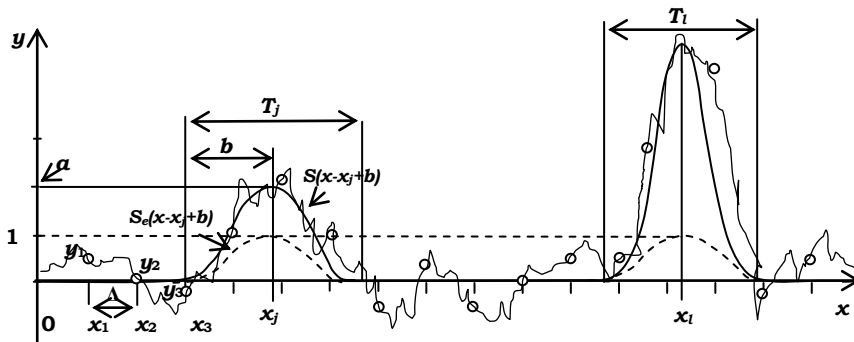


Рис. 7.2. Приклад детермінованих сигналів на фоні завади: x_j, x_l – серединні точки областей T_j, T_l сигналів; Δ – крок спостережень; y_1, y_2, \dots, y_n – спостереження

Відгук фільтра Z_j обчислюють за формулою

$$Z_j = \sum_{i=1}^k c_i y_i^{(j)} = \vec{c}^t \vec{y}^{(j)}, \quad (7.27)$$

де $\vec{y}^{(j)} = \{y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, \dots, y_k^{(j)}\}$ – зведені до нульового фону значення реалізації випадкової функції в точках, які належать T_j ; k – кількість точок спостережень у T_j . Значення Z_j відносять до точки x_j , положення якої відносно T_j визначається особливостями фільтра. Найчастіше x_j – середина T_j .

Відношення сигнал/завада має вигляд

$$\rho = \frac{(\mathbf{M}_1 Z_j)^2}{\mathbf{D} Z_j} = \frac{1}{\mathbf{V}_1^2(Z_j)}, \quad (7.28)$$

де $\mathbf{M}_1 Z_j$ – математичне сподівання відгуку за наявності сигналу, $\mathbf{D} Z_j$ – дисперсія відгуку (не залежить від наявності сигналу); $\mathbf{V}_1(Z_j) = V_z = \sqrt{\mathbf{D} Z_j} / \mathbf{M}_1 Z_j$ – коефіцієнт варіації Z_j за наявності сигналу.

Оптимальні вагові коефіцієнти фільтра. Вагові коефіцієнти c_1, c_2, \dots, c_k , які забезпечують максимум відношення сигнал/завада (7.28), з точністю до сталого множника мають вигляд

$$\{c_1, c_2, \dots, c_k\}' = \vec{c} = \mathbf{B}^{-1} \vec{S}, \quad (7.29)$$

де \mathbf{B} – коваріаційна матриця значень завади $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ у точках, що віддалені одна від одної вздовж осі абсцис на відстань кроку спостережень Δ ; $\vec{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}'$ – вектор, що складається зі значень S_1, S_2, \dots, S_k , які описують форму сигналу (7.26)¹.

З формули (7.29) видно, що вагові коефіцієнти c_1, c_2, \dots, c_k можна знайти із системи рівнянь

$$\begin{cases} c_1 b_{11} + c_2 b_{12} + \dots + c_k b_{1k} = S_1 \\ c_1 b_{21} + c_2 b_{22} + \dots + c_k b_{2k} = S_2 \\ \dots \\ c_1 b_{k1} + c_2 b_{k2} + \dots + c_k b_{kk} = S_k, \end{cases} \quad (7.30)$$

де b_{ij} – елементи матриці \mathbf{B} , які виражаються через кореляційну функцію завади у вигляді

$$b_{ij} = r(|i-j| \Delta). \quad (7.31)$$

Дисперсія відгуку, який обчислюється з оптимальними ваговими коефіцієнтами (7.29), згідно з (7.21) має вигляд

$$\mathbf{DZ}_j = \vec{c}' \mathbf{B} \vec{c} = \vec{S}' \mathbf{B}^{-1} \vec{c} = \vec{S}' \vec{c} = \sum_{i=1}^k c_i S_i. \quad (7.32)$$

Математичне сподівання відгуку за відсутності сигналу згідно з (7.19) дорівнює нулю: $\mathbf{M}_0 Z_j = 0$. За наявності сигналу

$$\mathbf{M}_1 Z_j = \vec{c}' \vec{S} = \sum_{i=1}^k c_i S_i; \quad V_z = 1 / \sqrt{\sum_{i=1}^k c_i S_i}. \quad (7.33)$$

Максимального значення відношення сигнал/завада набуває при оптимальних вагових коефіцієнтах (7.29):

$$\rho = \sum_{i=1}^k c_i S_i = \vec{S}' \mathbf{B}^{-1} \vec{S} = \mathbf{DZ}_j = \mathbf{M}_1 Z_j = 1 / \mathbf{V}_1^2(Z_j). \quad (7.34)$$

Звідси випливає, що для оптимального фільтра з коефіцієнтами (7.29)

$$\mathbf{DZ}_j = \rho, \quad \mathbf{M}_1 Z_j = \rho, \quad \mathbf{V}_1(Z_j) = 1 / \sqrt{\rho}. \quad (7.35)$$

¹ Якщо всі вагові коефіцієнти помножити на одне й те саме число, що не дорівнює нулю, то відношення сигнал/завада не зміниться.

Нормовані вагові коефіцієнти оптимального фільтра. Нормування вагових коефіцієнтів

$$c_i^0 = \frac{c_i}{\sum_{i=1}^k c_i S_i} \quad (7.36)$$

зводить до одиниці умовне математичне сподівання відгуку за наявності сигналу:

$$\mathbf{M}_1 \bar{c}' \bar{y}_j = \sum_{i=1}^k c_i^0 S_i. \quad (7.37)$$

Якщо оптимальні вагові коефіцієнти (7.29) нормувати за формулою (7.36), то отримані коефіцієнти $\bar{c}_0 = \{c_1^0, c_2^0, \dots, c_k^0\}'$ зводять до мінімуму дисперсію відгуку $Z_j^0 = (\bar{c}_j^0)' y_j$ за умови, що за наявності сигналу S_1, S_2, \dots, S_k його середнє значення дорівнює 1. Величина дисперсії

$$\mathbf{D}Z_j^0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^k c_i S_i} = \frac{1}{\bar{\mathbf{S}}' \mathbf{B}^{-1} \bar{\mathbf{S}}} = \bar{\mathbf{c}}_0' \mathbf{B} \bar{\mathbf{c}}_0 = \sum_{i=1}^k c_i^0 b_{ij} c_j^0. \quad (7.38)$$

Якщо у (7.36) замість S_i ($i = 1, 2, \dots, k$) підставити значення, зведені до одиничної амплітуди

$$S_i^{(l)} = \frac{S_i}{a} \quad (a = \max_{1 \leq i \leq k} S_i), \quad (7.39)$$

які мають ту властивість, що найбільше з них дорівнює 1, то дістанемо вагові коефіцієнти, які у a разів менші за коефіцієнти \bar{c} (7.29):

$$\bar{\mathbf{c}}_0 = \mathbf{B}^{-1} \bar{\mathbf{S}}_l = \frac{1}{a} \bar{\mathbf{c}}, \quad (7.40)$$

де $\bar{\mathbf{S}}_l = \{S_1^{(l)}, S_2^{(l)}, \dots, S_k^{(l)}\}'$. Після нормування у вигляді

$$c_i^{(0l)} = \frac{c_i^{(l)}}{\sum_{i=1}^k c_i^{(l)} S_i^{(l)}} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (7.41)$$

дістанемо коефіцієнти $\bar{\mathbf{c}}_{0l}$, які мають такі властивості: якщо сигнал має амплітуду a , то математичне сподівання відгуку

$$Z_j^{(0l)} = \bar{\mathbf{c}}_{0l}' \bar{\mathbf{y}}^{(j)} = \sum_{i=1}^k c_i^{(0l)} y_i^{(j)} \quad (7.42)$$

дорівнює цій амплітуді:

$$\mathbf{M}_1 Z_j^{(0l)} = a; \quad (7.43)$$

дисперсія та коефіцієнт варіації

$$\mathbf{D}Z_j^{(0l)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^k c_i^{(l)} S_i^{(l)}}, \quad \mathbf{V}(Z_j) = \frac{1}{a \sqrt{\sum_{i=1}^k c_i^{(l)} S_i^{(l)}}}. \quad (7.44)$$

Завдяки властивості (7.43) відгук $Z_j^{(0l)}$ є одночасно й оцінкою амплітуди.

Оптимальний фільтр у випадку некорельованої завади. Якщо завада некорельована, то вагові коефіцієнти c_i оптимального фільтра пропорційні S_i :

$$c_i = S_i / \sigma^2 \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (7.46)$$

де σ^2 – дисперсія завади. Математичне сподівання відгуку за наявності сигналу, дисперсія відгуку та відношення сигнал/завада зв'язані співвідношеннями

$$\mathbf{M}_1 Z_j = \mathbf{D}Z_j = \rho = \sum_{i=1}^k c_i S_i = \sum_{i=1}^k S_i^2 / \sigma^2. \quad (7.47)$$

Якщо замість S_i використати значення $S_i^{(l)}$, зведені до одиничної амплітуди ($\max S_i^{(l)} = 1$), то нормовані коефіцієнти фільтра матимуть вигляд

$$c_i^{(0l)} = S_i^{(l)} / \sum_{i=1}^k S_i^{(l)2}. \quad (7.48)$$

Відгук (7.42), який обчислюється за цими коефіцієнтами, має такі властивості:

$$\mathbf{M}_1 Z_j^{(0l)} = a, \quad \mathbf{D}_1 Z_j^{(0l)} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^k S_i^{(l)2}}, \quad \mathbf{V}_1(Z_j) = \frac{\sigma}{a \sqrt{\sum_{i=1}^k S_i^{(l)2}}}. \quad (7.49)$$

Фільтрація за спостереженнями k різних величин ($k > 1$). Фільтрації можуть підлягати разом спостереження k різних величин Y_1, Y_2, \dots, Y_k , зведених до нульового фону. Ними можуть бути, наприклад, некорельовані спостереження на паралельних профілях або показання за різними методами дослідження. Замість Y_i може використовуватися також відгук, який дістають у результаті фільтрації спостережень за i -м методом дослідження. За наявності сигналу

$$Y_i = S_i + \delta_i \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (7.50)$$

де δ_i – завада ($\mathbf{M}\delta_i = 0$), S_i – значення сигналу ($\mathbf{M}_1 Y_i = S_i$).

Відгук фільтра має вигляд

$$Z = \sum_{i=1}^k c_i Y_i; \quad (7.51)$$

його дисперсія

$$\mathbf{DZ} = \sum_{i,l=1}^k c_i b_{ij} c_l = \bar{c}' \mathbf{B} \bar{c}, \quad (7.52)$$

де \mathbf{B} – коваріаційна матриця завад $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k\}'$. Вагові коефіцієнти визначаються за (7.29) або із системи рівнянь (7.30). Дисперсія відгуку, його математичне сподівання та максимальне відношення сигнал/завада, здобуте при цих коефіцієнтах, виражаються формулами (7.33)–(7.35).

Якщо завади $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ некорельовані, то оптимальні вагові коефіцієнти мають вигляд

$$c_i = \frac{S_i}{\sigma_i^2} \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (7.53)$$

де $\sigma_i^2 = \mathbf{D}\delta_i$. У цьому випадку, якщо, у свою чергу, Y_i – відгук фільтра з відношенням сигнал/завада ρ_i , то відношення сигнал/завада для Z має вигляд

$$\rho = \sum_{i=1}^k \rho_i = \sum_{i=1}^k \frac{S_i^2}{\sigma_i^2}. \quad (7.54)$$

Нормовані вагові коефіцієнти, які зводять до одиниці сподіване значення відгуку за умови наявності сигналу:

$$c_i^0 = \frac{c_i}{\sum_{i=1}^k c_i S_i} = \frac{S_i \sigma_i^{-2}}{\sum_{i=1}^k S_i^2 \sigma_i^{-2}}. \quad (7.55)$$

Якщо відгук Z_j^0 розраховують із цими коефіцієнтами, то

$$\mathbf{M}_1 Z_j^{(0)} = 1, \quad \mathbf{DZ}_j^0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^k \frac{S_i^2}{\sigma_i^2}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^k \rho_i}. \quad (7.56)$$

Критерії для виділення сигналів. Імовірності помилок I-го та II-го роду. Згідно з теорією перевірки гіпотез, оптимальне рішення про наявність або відсутність детермінованого сигналу досягається критерієм відношення правдоподібності. Нехай $f_0(\vec{x})$ і $f_1(\vec{x})$ – щільності k -вимірного розподілу

вектора спостережень $\vec{y}_j = \{y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, \dots, y_k^{(j)}\}'$ за відсутності сигналу (гіпотеза H_0) та за наявності (H_1). Згідно з цим критерієм, гіпотеза H_0 відхиляється, якщо виконується умова

$$\frac{f_1(\bar{y})}{f_0(\bar{y})} \geq A \quad (7.57)$$

(A – критична границя). Оскільки для виділення сигналу використовується відгук Z_j фільтра, то рішення про наявність сигналу приймається у тому випадку, коли

$$\frac{p_1(Z_j)}{p_0(Z_j)} \geq A \quad (7.58)$$

де $p_0(Z_j)$ і $p_1(Z_j)$ – значення щільності розподілу відгуку при значенні аргументу, що дорівнює Z_j ¹.

Помилка I-го роду – фіксація хибного сигналу; помилка II-го роду – пропущення сигналу. Імовірності цих помилок α_{01} і α_{10} характеризують якість фільтра. *Надійність* виділення сигналу – це ймовірність прийняття гіпотези H_1 про наявність сигналу, якщо він дійсно має місце: $\gamma = 1 - \alpha_{10}$.

Критерій Бейеса зводить до мінімуму середню ціну помилок (середній ризик):

$$c = q_0 c_{01} \alpha_{01} + q_1 c_{10} \alpha_{10}, \quad (7.59)$$

де q_0 і $q_1 = 1 - q_0$ – апіорні ймовірності відповідно відсутності та наявності сигналу; c_{01} і c_{10} – ціни помилок I-го та II-го роду. Цей критерій має вигляд (7.58), причому

$$A = \frac{q_0 c_{01}}{q_1 c_{10}}. \quad (7.60)$$

Той самий вигляд (7.58) має і *критерій Котельникова* з тим уточненням, що для нього

$$A = \frac{q_0}{q_1}, \quad (7.61)$$

тобто ціни помилок не враховуються або вважаються однаковими. Цей критерій мінімізує середню ймовірність помилки:

$$\beta = q_0 \alpha_{01} + q_1 \alpha_{10}. \quad (7.62)$$

При $A = 1$ (не враховуються або рівні між собою q_0 і q_1 ; c_{01} і c_{10}) критерій (7.58) забезпечує мінімум суми ймовірностей помилок I-го та II-го роду.

Критичну границю A можна визначити й так, щоб вона забезпечувала задану ймовірність помилки I-го роду: $A = A(\alpha_{01})$. Тоді критерій (7.58) мінімізує ймовірність помилки II-го роду, тобто зводить до максимуму надійність.

¹ Можна показати, що у випадку гауссівської завади критерій (7.58) для лінійного фільтра та (7.57) еквівалентні. Це означає, що при такій заваді лінійний фільтр є оптимальним серед будь-яких інших.

7. Фільтрація випадкових функцій. Спектральні відображення

Апостеріорна ймовірність відсутності сигналу за умови, що відгук дорівнює Z_j :

$$\mathbf{P}(H_0 / Z_j) = \frac{q_0 p_0(Z_j)}{q_0 p_0(Z_j) + q_1 p_1(Z_j)} = \frac{1}{1 + \lambda_q(Z_j)}, \quad (7.63)$$

де $\lambda_q(Z_j) = \frac{q_1 p_1(Z_j)}{q_0 p_0(Z_j)}$. Якщо q_0 невідоме, то покладають $q_0 = q_1 = 0,5$. Тоді

$$\mathbf{P}(H_0 / Z_j) = \frac{p_0(Z_j)}{p_0(Z_j) + p_1(Z_j)} = \frac{1}{1 + \lambda(Z_j)}, \quad \mathbf{P}(H_1 / Z_j) = \frac{1}{1 + \lambda^{-1}(Z_j)}, \quad (7.64)$$

де $\lambda(Z_j) = p_1(Z_j) / p_0(Z_j)$.

Якщо відгук Z_j розподілений нормально (завада – гауссівська випадкова функція), то критерій (7.58) зводиться до вигляду

$$Z_j > A_z, \quad (7.65)$$

причому

$$A_z = \frac{\mathbf{D}Z_j}{\mathbf{M}_1 Z_j} \ln A + \frac{\mathbf{M}_1 Z_j}{2}. \quad (7.66)$$

Значенням $\lambda(Z_j)$ у (7.64) буде

$$\lambda(Z_j) = \exp\left(\frac{Z_j \mathbf{M}_1 Z_j}{\mathbf{D}Z_j} - \frac{(\mathbf{M}_1 Z_j)^2}{2\mathbf{D}Z_j}\right). \quad (7.67)$$

Величина A визначається за формулами (7.59), (7.61). Імовірності помилок і надійність γ при використанні границі (7.66)

$$\alpha_{10} = \Phi\left(\frac{A_z - \mathbf{M}_1 Z_j}{\sqrt{\mathbf{D}Z_j}}\right) = \Phi\left(\mathbf{V}_1(Z_j) \ln A - \frac{0,5}{\mathbf{V}_1(Z_j)}\right), \quad (7.68)$$

$$\alpha_{01} = 1 - \Phi\left(\frac{A_z}{\sqrt{\mathbf{D}Z_j}}\right) = 1 - \Phi\left(\mathbf{V}_1(Z_j) \ln A + \frac{0,5}{\mathbf{V}_1(Z_j)}\right),$$

$$\gamma = \Phi\left(\mathbf{V}_1(Z_j) \ln A + \frac{0,5}{\mathbf{V}_1(Z_j)}\right),$$

де $\mathbf{V}_1(Z_j)$ – коефіцієнт варіації відгуку Z_j у разі наявності сигналу.

Якщо інформація про ціни помилок та апіорні ймовірності q_0 і q_1 не використовуються або невідома, то $A = 1$. У цьому випадку критична границя

$$A_z = \frac{\mathbf{M}_1 Z_j}{2}, \quad (7.69)$$

а ймовірності помилок I-го та II-го роду

$$\alpha_{01} = \alpha_{10} = \Phi\left(-\frac{0,5}{\mathbf{V}_1(Z_j)}\right). \quad (7.70)$$

Якщо величина $\mathbf{M}_1 Z_j$ є невідомою, тобто невідома амплітуда сигналу, то критичну границю обчислюють за заданою ймовірністю помилки I-го роду $\alpha = \alpha_{01}$:

$$A_z(\alpha) = U_{1-\alpha} \sqrt{\mathbf{D}Z_j}. \quad (7.71)$$

Тоді ймовірність помилки II-го роду α_{10} та надійність γ становлять

$$\alpha_{10} = \Phi\left(U_{1-\alpha} - \frac{1}{\mathbf{V}_1(Z_j)}\right), \quad \gamma = \Phi\left(\frac{1}{\mathbf{V}_1(Z_j)} - U_{1-\alpha}\right). \quad (7.72)$$

Умова, коли α_{10} не буде перевищувати α :

$$\mathbf{V}_1(Z_j) < \frac{0,5}{U_{1-\alpha}}. \quad (7.73)$$

Наведені формули (7.66) – (7.73) придатні для довільних лінійних фільтрів. Для фільтра з оптимальними ваговими коефіцієнтами (7.29) формули (7.66)–(7.73) набувають вигляду

$$A_z = \ln A + \frac{\rho}{2}, \quad \alpha_{10} = \Phi\left(\frac{A_z - \rho}{\sqrt{\rho}}\right), \quad \alpha_{01} = 1 - \Phi\left(\frac{A_z}{\sqrt{\rho}}\right), \quad (7.74)$$

$$\gamma = 1 - \alpha_{01} = \Phi\left(\frac{A_z}{\sqrt{\rho}}\right), \quad \lambda(Z_j) = \exp(Z_j - \rho/2), \quad (7.75)$$

де $\rho = 1/\mathbf{V}_1^2(Z_j)$ – відношення сигнал/завада.

При $A = 1$ (критерій мінімуму суми ймовірностей помилок) для того самого фільтра з оптимальними ваговими коефіцієнтами (7.28)

$$A_z = \rho/2, \quad \alpha_{10} = \alpha_{01} = \Phi(-\sqrt{\rho}/2), \quad \gamma = 1 - \Phi(-\sqrt{\rho}/2) = \Phi(\sqrt{\rho}/2). \quad (7.76)$$

З формули (7.76) можна виразити відношення сигнал/завада через надійність критерію

$$\rho = 4U_\gamma^2. \quad (7.77)$$

Лінійний фільтр по неперервній реалізації. Якщо задано неперервну реалізацію $y(x)$ випадкової функції на інтервалі $[a, b]$, то узгоджений із сигналом $S(x - x_j)$ фільтр має вигляд

7. Фільтрація випадкових функцій. Спектральні відображення

$$Z_j = \int_a^b c(x - x_j) y(x) dx, \quad (7.78)$$

де $c(x - x_j)$ – вагова функція, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$\int_a^b r_\delta(x - t) \cdot c(t - x_j) dt = S(x - x_j) \Leftrightarrow \int_{a-x_j}^{b-x_j} r(u - \tau) \cdot c(\tau) d\tau = S(u), \quad (7.79)$$

де $r_\delta(x - t)$ – кореляційна функція завади. Функція $c_j(x)$ забезпечує максимум відношення сигнал/завада. Наближений розв'язок у вигляді (7.29), (7.30) можна дістати заміною інтеграла скінченною сумою.

Приклад 7.16. Уздовж профілю зі сталим кроком Δ дістали значення фізичного поля g_1, g_2, \dots, g_{17} :

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
g_i	12	14	10	8	12	6	10	11	9	10	8	10	7	12	15	12	9

1) За першими 12-ма спостереженнями оцінити рівень фону, дисперсії завади σ^2 , значення кореляційної функції $r(0), r(\Delta), r(2\Delta)$ та нормованої кореляційної функції $r_N(\Delta), r_N(2\Delta)$. Звести всі 17 спостережень до нульового фону.

2) Розрахувати нормовані вагові коефіцієнти $c_1^{(0l)}, c_2^{(0l)}, c_3^{(0l)}$ оптимального фільтра за трьома точками, вважаючи, що завада некорельована, а перевищення S_i сигналу над фоном у центрі сигналу вдвічі більше, ніж у сусідніх із центром точках.

3) За допомогою фільтра (п. 2) виконати фільтрацію ряду зведених до нульового фону спостережень y_i , відносячи відгук фільтра до точки x , яка займає центральне положення серед чергових трьох точок інтервалу фільтрації.

4) Оцінити критичну границю A_z для відгуку фільтра (п. 2), який забезпечує мінімум суми ймовірностей помилок I-го та II-го роду критерію для виділення сигналу з амплітудою $a = 2\sigma$. Оцінити ймовірності цих помилок.

5) Оцінити критичну границю $A_z(\alpha)$ для відгуку фільтра (п. 2), яка забезпечує ймовірність помилки I роду $\alpha = 0,05$. Визначити при цій границі ймовірність помилки II роду α_{10} при $a = 2\sigma$. Визначити в ряді початкових спостережень положення сигналу, який виділяють за допомогою цього фільтра.

Розв'язання. 1) За формулами (7.4), (7.8)–(7.10), використовуючи засоби MathCad, отримаємо: $\bar{y} = 10$, $\check{r}(0) = \check{\sigma}^2 \approx 4,167$, $\check{r}(2\Delta) \approx -0,4545$, $r_N(\Delta) \approx -0,109$; $\check{r}(2\Delta) \approx -0,2$; $\check{r}_N(2\Delta) = -0,048$.

2) За умовою задачі $S_1^{(l)} = S_3^{(l)} = 0,5$, $S_2^{(l)} = 1$ (оскільки $\max S_i^{(l)} = 1$). За формулою (7.46) $S_1^{(l)} = S_3^{(l)} = 0,5\bar{\sigma}^2$, $c_2^{(l)} = 1/\bar{\sigma}^2$. Оцінки нормованих вагових коефіцієнтів (7.48)

$$c_1^{(0l)} = S_1^{(l)} / (S_1^{(l)2} + S_2^{(l)2} + S_3^{(l)2}) = 1/3, \quad c_2^{(0l)} = 2/3, \quad c_3^{(0l)} = 1/3.$$

3) Відгук фільтра: $Z_j^{(0l)} = \frac{1}{3}y_1^{(j)} + \frac{2}{3}y_2^{(j)} + \frac{1}{3}y_3^{(j)}$. Віднімаючи від кожного такого значення величину $\bar{y} \sum_{i=1}^3 c_i^{(0l)} = 13,33$, одержимо:

j	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Z_j	3,33	0,67	-0,67	-0,67	-2	-1	0,33	-1	-1,33	-1,33	-1,67	0	2	4,67	2,67

4) За формулами (7.69), (7.43) $A_Z^{(0l)} = \frac{a}{2} = \bar{\sigma} = 2,04$.

Імовірності помилок I-го та II-го роду обчислюємо за формулами (7.70), використовуючи вираз $V_1(Z_j)$ (7.49) з підстановкою $a = 2\sigma$:

$$V_1(Z_j) = \frac{\sigma}{a \sqrt{\sum_{i=1}^3 S_i^{(l)2}}} = \frac{1}{2\sqrt{1,5}}.$$

$$\alpha_{01} = \alpha_{10} = \Phi(-0,5 / V_1(Z_j)) = \Phi(-0,5 \cdot 2\sqrt{1,5}) = \Phi(-1,22) \approx 0,111.$$

5) За формулою (7.71) з використанням виразу DZ_j (7.49) дістанемо

$$A_Z(0,05) = U_{0,95} \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^3 S_i^{(l)2}}} = 1,645 \frac{\sigma}{\sqrt{1,5}} \approx 1,343\sigma \approx 2,74.$$

Імовірність помилки II-го роду обчислюється за формулою (7.72) з підстановкою $V_1(Z_j)$ (7.49):

$$\alpha_{10} = \Phi\left(U_{0,95} - \frac{a}{\sigma} \sqrt{\sum_{i=1}^3 S_i^{(l)2}}\right) = \Phi(1,645 - 2\sqrt{1,5}) = \Phi(-0,804) \approx 2.$$

Оцінки положення та амплітуд сигналів: 1) x_2 , $\check{a}_2 = Z_2 = 3$;

2) x_{15} , $\check{a}_{15} = Z_{15} = 4,67$.

Приклад 7.17. За даними прикладу 7.16 у припущенні некорельованої завади та амплітуди сигналу $a = 2\sigma$ оцінити ймовірність наявності аномалії

7. Фільтрація випадкових функцій. Спектральні відображення

1 : 2 : 1 в області, яка зображена: 1) 1-м, 2-м, 3-м спостереженнями; 2) 14-м, 15-м, 16-м спостереженнями.

Розв'язання. Використовуємо формули (7.64), (7.47) $\rho = \sum_{i=1}^3 S_i^2 / \sigma^2$ при

$a = 2\sigma, S_1 = S_3 = \sigma, S_2 = 2\sigma$. Отже, $\rho = 1 + 4 + 1 = 6$ і $\lambda(Z_j) = e^{Z_j - \frac{\rho}{2}} = e^{Z_j - 3}$, де

$Z_j = \sum_{i=1}^3 c_i y_i^{(j)}$ – відгук фільтра. Коефіцієнти фільтра за (7.46): $c_1 = c_3 = S_1 / \sigma^2$

$= 1/\sigma; c_2 = S_2 / \sigma^2 = 2/\sigma$. За даними прикладу 7.16 $\bar{\sigma} = \sqrt{4,167} \approx 2,04; \bar{y} = 10$.

1) Для 1-го, 2-го і 3-го спостережень після зведення до нульового фону

$Z_2 = \frac{1}{\sigma}(y_1 + 2y_2 + y_3) = \frac{1}{\sigma}(2 + 2 \cdot 4 + 0) \approx 4,9, \lambda(Z_2) = \exp(1,9) \approx 6,69$.

Імовірність наявності аномалії: $\mathbf{P}(H_1 / Z_2) = 1 / (1 + \lambda^{-1}(Z_2)) = 0,87$.

2) Для 14-го, 15-го і 16-го спостережень

$Z_{15} = \frac{1}{\sigma}(y_{14} + 2y_{15} + y_{16}) = \frac{1}{\sigma}(2 + 2 \cdot 5 + 2) \approx 6,89, \lambda(Z_{15}) = \exp(3,86) \approx 47,4,$

$\mathbf{P}(H_1 / Z_{15}) \approx 0,98$.

Приклад 7.18. Спостереження поля, які дістали за трьома профілями зі сталим кроком Δ , зведені до нульового фону¹:

III	-1	0	2	-1	4	2	1	-2	0	-1
II	2	-3	0	1	3	2	-1	0	-3	2
I	0	2	-3	1	1	2	1	0	-2	-3

1) Обчислити оцінки значень взаємної кореляційної функції $\check{r}_1(0), \check{r}_1(-\Delta), \check{r}_1(-2\Delta)$ для сусідніх профілів і зсуву l_0 між ними ($(j + 1)$ -го відносно j -го).

2) Обчислити значення відгуку Z уздовж трьох профілів як середнє з трьох спостережень на них, які корелюються зі зсувом l_0 .

3) Визначити оцінки значень двовимірної кореляційної функції $R(0, 0), R(-\Delta, h), R(\Delta, -h), R(0, h)$, вважаючи, що профілі віддалені один від одного на відстань h . Визначити оцінку значення нормованої двовимірної кореляційної функції $R^{(N)}(-\Delta, h)$.

Розв'язання. 1) За формулою (7.11) маємо:

¹ Задачу запропоновано проф. А.А. Нікітіним.

$$\begin{aligned} \check{r}_{12}(0) &= 0,1, \quad \check{r}_{12}(-\Delta) = 3,44, \quad \check{r}_{12}(-2\Delta) = -0,25; \\ \check{r}_{23}(0) &= 1, \quad \check{r}_{23}(-\Delta) = 1,56, \quad \check{r}_{23}(-2\Delta) = -0,875; \\ \check{r}_1(0) &= 0,5 \cdot (\check{r}_{12}(0) + \check{r}_{23}(0)) = 0,55; \quad \check{r}_1(-\Delta) = 0,5 \cdot (\check{r}_{12}(-\Delta) + \check{r}_{23}(-\Delta)) = 2,5; \\ &\quad \check{r}_1(-2\Delta) = -0,563. \end{aligned}$$

Оцінку зсуву l_0 визначаємо за максимумом взаємної кореляційної функції: $\check{l}_0 = 1$.

2) Обчислимо Z_j за спостереженнями, які корелюються зі зсувом на один крок ($l_0 = 1$):

$$Z_1 = (-1 - 3 - 3)/3 = -2,33, \quad Z_2 = (0 + 0 + 1)/3 = 0,33 \text{ і т. д.}$$

j	1	2	3	4	5	6	7	8
Z_j	-2,33	0,33	1,33	1,33	2,33	0,33	-0,33	-2,67

4) За формулою (7.12) $R(-\Delta, h) = \check{r}_1(-\Delta) = 2,5$. $R(\Delta, h) = R(-\Delta, h) = 2,5$, $R(0, h) = \check{r}_1 = 0,55$. Обчислюємо $r(0)$ по першому, другому й третьому рядах:

$$3,3, 4,1, 3,2. \text{ За формулою (7.12) } R(0,0) = \frac{1}{3}(3,2 + 4,1 + 3,2) \approx 3,57.$$

$$5) \quad R^{(N)}(-\Delta, h) = R(-\Delta, h) / R(0,0) = 2,5 / 3,57 \approx 0,7.$$

Задачі для самостійного розв'язання

7.19. Коефіцієнт варіації відгуку Z за наявності сигналу дорівнює 0,5. Чому дорівнює відношення сигнал/завада?

7.20. Чому дорівнює відношення сигнал/завада за відсутності сигналу?

7.21. Нормовані вагові коефіцієнти $c_1^{(0l)}, c_2^{(0l)}, \dots, c_5^{(0l)}$ узгоджені із сигналом $\vec{S}' = \{0,1, 0,5, 1, 0,5, 0,1\}$, зведені до одиничної амплітуди. Значення відгуку $\sum_{i=1}^5 c_i^{(0l)} y_i$ за зведеними до нульового фону спостереженнями y_i дорівнює 10. Чому дорівнює оцінка амплітуди сигналу?

7. Фільтрація випадкових функцій. Спектральні відображення

7.22. Надійність виділення аномалії становить 0,95. Імовірність правильного висновку про відсутність аномалії – 0,9. Чому дорівнюють імовірності α_{10} пропущення аномалії та α_{01} виділення хибної аномалії?

7.23. Оптимальний лінійний фільтр $Z_j = \vec{c}'\vec{y}_j$ ($\vec{c} = \mathbf{B}^{-1}\vec{S}$, \mathbf{B} – коваріаційна матриця завади), узгоджений із сигналом $\vec{S}' = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$. Відношення сигнал/завада дорівнює ρ . Визначити математичне сподівання, дисперсію відгуку та відношення ρ_a сигнал/завада, якщо фактичний сигнал у a разів інтенсивніший того, з яким узгоджено фільтр: $\vec{S}_a = a\vec{S}$.

Відповідь: $\mathbf{M}_1 Z_j = a\rho$, $\mathbf{D}Z_j = \rho$, $\rho_a = a^2\rho$.

7.24. Оптимальний лінійний фільтр Z за чотирма точками узгоджено із сигналом: $\{0,5; 1; 1; 0,5\}'$. Вагові коефіцієнти: 1; 2; 2; 1. Обчислити:

- 1) відношення сигнал/завада;
- 2) математичне сподівання, дисперсію та коефіцієнт варіації відгуку за наявності сигналу $\{0,5; 1; 1; 0,5\}'$.
- 3) те саме за наявності сигналу $\{2; 4; 4; 2\}'$.
- 4) відгук за рядом спостережень: 0; 1; 2; 3; 1; -0,5; -1; -0,5; 0.

Відповідь: 1) $\rho = 5$; 2) $\mathbf{M}_1 Z = \mathbf{D}Z = 5$, $\mathbf{V}_1(Z) = 1/\sqrt{5}$; 3) $\mathbf{M}_1 Z = 20$.

7.25*. $Z_j = \sum_{i=1}^k c_i y_i^{(j)} = \vec{c}'\vec{y}_j$ – оптимальний лінійний фільтр для виділення детермінованого сигналу $\vec{S}' = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}'$ на фоні завади, яка має кореляційну матрицю \mathbf{R} та дисперсію σ . Довести, що $\vec{c} = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{R}^{-1} \vec{S}$.

7.26. Спостереження поля за трьома профілями дістали зі сталим кроком Δ та звели до нульового фону:

j	1	2	3	4	5	6	7	8
III	5	12	0	-7	-8	2	0	4
II	9	-1	-6	-4	0	2	1	0
I	-2	-5	-2	1	1	7	0	5

- 1) Обчислити оцінки значень взаємної кореляційної функції $\check{r}_1(2\Delta)$, $\check{r}_1(\Delta)$ для сусідніх профілів та зсув l_0 між ними ($(j+1)$ -го відносно j -го).
- 2) Обчислити значення відгуку Z_j за спостереженнями трьох профілів, які корелюються зі зсувом l_0 , з ваговими коефіцієнтами 1/3, 1/3, 1/3.

3) Визначити оцінки значень двовимірної кореляційної функції $R(0, 0)$, $R(\Delta, h)$, $R(-\Delta, -h)$, $R(-\Delta, h)$, вважаючи, що профілі віддалені один від одного на відстань h . Визначити оцінки значення нормованої двовимірної кореляційної функції $R^{(N)}(\Delta, h)$.

4) Обчислити відгуки $Z_j^{(1)}, Z_j^{(2)}, Z_j^{(3)}$ уздовж профілів з коефіцієнтами фільтра 1, 2, 1. Обчислити за $Z_j^{(1)}, Z_j^{(2)}, Z_j^{(3)}$ значення відгуку Z_j за трьома профілями з коефіцієнтами фільтра 1/15, 1/15, 1/15, корелюючи їх зі зсувом l_0 .

Відповідь: 1)

τ	$-\Delta$	0	Δ	2Δ
$\check{r}_1(\tau)$	-9,9	4,6	16,8	7,5

2)

j	3	4	5	6	7	8
Z_j	-1	-6	-4,7	1	1	4

3) $R(0, 0) \approx 22,9$; $R(\Delta, h) = 16,8 = R(-\Delta, -h)$; $R(-\Delta, h) = -9,9$. $R^{(N)}(\Delta, h) = 0,733$.

4)

j	4	5	6	7
Z_j	-3,53	-2,87	-0,33	1,4

7.27. Уздовж свердловини зі сталим кроком h виміряно значення показника ξ :

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ξ	130	110	120	125	130	105	115	120	120	125
№	11	12	13	14	15	16	17	28	19	20
ξ	115	100	120	130	140	125	110	135	80	120

з гауссівською випадковою завадою.

1) За першими 10 спостереженнями оцінити рівень фону, дисперсію завади σ^2 , значення кореляційної функції $r(0)$, $r(h)$, $r(2h)$ та нормованої кореляційної функції $r_N(h)$, $r_N(2h)$.

2) Розрахувати нормовані вагові коефіцієнти $c_1^{(0l)}, c_2^{(0l)}, \dots, c_5^{(0l)}$ оптимального фільтра за п'ятьма точками, який узгоджено із сигналом $\{1 : 2 : 5 : 2 : 1\}$.

Виконати завдання, вказані в п. 3) – 5) прикладу 7.16 для п'ятиточкового фільтра при $a = 2,5 \sigma$ за наведеними вище в таблиці даними.

Відповідь: 1) $\bar{y} = 120$, $\check{\sigma}^2 = \check{r}(0) = 60$, $\check{r}(h) = -13,89$, $\check{r}_N(h) = -0,231$, $\check{r}(2h) = -21,88$, $\check{r}_N(2h) = -0,365$. 2) $c_i^{(0l)}$: 1/7; 2/7; 5/7; 2/7; 1/7.

7. Фільтрація випадкових функцій. Спектральні відображення

3)

j	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16	17	18
Z_j	1,4	2,9	3,6	-8,6	-6,4	-2,9	0	-0,7	-7,9	-13,6	-0,7	10,7	10	-4,3	-2,9

4) $A_Z = 9,68$, $\alpha_{01} = \alpha_{10} \approx \Phi(-1,48) \approx 0,069$;

5) $A_Z(0,05) \approx 10,8$, $\alpha_{10} = \Phi(-1,313) \approx 0,095$.

Оцінки положення сигналів та амплітуд: 1) x_{14} , $\tilde{a}_{14} = 10,7$; 2) x_{15} , $\tilde{a}_{15} = 17,1$.

7.28. Відгук фільтра обчислюється як середнє арифметичне з k сусідніх спостережень поля, зведених до нульового фону. Дисперсія некорельованої завади дорівнює σ^2 . Визначити відношення ρ сигнал/завада, якщо в області сигналу математичне сподівання поля перевищує фон на $t\sigma$.

Відповідь: $\rho = t^2 k$.

7.29. Для виявлення аномалій використовуються відгуки фільтрів Z_1, Z_2, \dots, Z_m , які дістали в результаті обробки спостережень за m геофізичними методами. Відношення сигнал/завада для цих фільтрів дорівнюють відповідно $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$. Завади за різними методами взаємно некорельовані. Дисперсія відгуків в області фону $DZ_i = \sigma_i^2$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Визначити вагові коефіцієнти оптимального лінійного фільтра вигляду

$Z = \sum_{i=1}^m c_i Z_i$ з мінімальною дисперсією DZ за умови, що за наявності аномалії

$M_1 Z = 1$. Виразити відношення сигнал/завада цього фільтра через $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$.

Відповідь: $c_i = \sqrt{\rho_i} \sigma_i^{-1} / \sum_{j=1}^m \rho_j$. $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i$.

7.30. Коефіцієнт варіації нормально розподіленого відгуку за наявності сигналу дорівнює 0,25. Чому дорівнює надійність виділення сигналу критерієм Котельникова з тією умовою, щоб сума ймовірностей помилок I-го та II-го роду була мінімальною?

Відповідь: $\Phi(2) = 0,977$.

7.31. Дисперсія нормально розподіленого відгуку Z фільтра дорівнює σ^2 , його математичне сподівання за відсутності сигналу дорівнює нулю, а за його наявності – $+t\sigma$. Априорні ймовірності наявності та відсутності сигналу однакові. Визначити ймовірності помилкового виділення сигналу α_{01} та його пропущення за критерієм Котельникова, якщо 1) $t = 2$; 2) $t = 3$; 3) $t = 4$.

Відповідь: 1) $\alpha_{01} = \alpha_{10} = \Phi(-t/2) \approx 0,159$; 2) $\alpha_{01} = \alpha_{10} \approx 0,067$;

3) $\alpha_{01} = \alpha_{10} \approx 0,023$.

7.32. Відгук Z фільтра розподілений нормально з дисперсією σ^2 . Математичне сподівання відгуку за наявності сигналу дорівнює S , а за його відсутності – нулю. Рішення про наявність сигналу приймається при виконанні умови $Z > S/2$. Визначити:

- 1) область значень відношення S/σ , коли надійність виділення сигналу буде не менше q ;
- 2) надійність виділення сигналу.

Відповідь: 1) $S/\sigma \geq 4U_q^2$; 2) $\gamma = \Phi(0,5S/\sigma)$.

7.33*. Спостереження фізичного поля $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}' = \bar{y}$ зведені до нульового фону й мають гауссівську випадкову заваду. \mathbf{B} – коваріаційна матриця завади. Сигнал задано значеннями $\{S_1, S_2, \dots, S_k\} = \bar{S}'$. Для виділення сигналу застосовується критерій відношення правдоподібності, який забезпечує однакові ймовірності помилок I-го та II-го роду.

Показати, що за цим критерієм гіпотеза про наявність сигналу має прийматися, якщо $\sum_{i=1}^k c_i y_i \geq 0,5 \sum_{i=1}^k c_i S_i$, де $\bar{c} = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}' = \mathbf{B}^{-1} \bar{S}$.

7.34. Сигнал має прямокутну форму й охоплює k сусідніх точок спостережень. Випадкова завада некорельована й розподілена нормально з дисперсією σ^2 .

1) Визначити оптимальний фільтр із нормованими ваговими коефіцієнтами вигляду $Z_j^{(0l)} = \sum_{i=1}^k c_i^{(0l)} y_i^{(j)}$. Указати для нього критичну границю $A_Z(0,05)$, яка відповідає ймовірності помилки I-го роду 0,05 та визначити надійність γ виділення сигналу, який перевищує рівень фону на $t\sigma$ ($t > 0$).

2) Перевірити за допомогою фільтра (п. 1) гіпотезу про відсутність сигналу за спостереженнями y_i , які дорівнюють 15, 20, 10, 25, якщо $k = 4$, ймовірність помилки I-го роду $\alpha_{01} = 0,05$, рівень фону дорівнює 10, дисперсія завади $\sigma^2 = 25$.

3) Визначити надійність виділення сигналу, при якому середнє значення поля дорівнює 16, якщо $k = 4$, $\sigma^2 = 25$, рівень фону $m = 10$, а критична границя розрахована для ймовірності помилки I-го роду 0,05.

Відповідь:

$$1) Z_j^{(0l)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_i^{(j)}; A_Z(0,05) = 1,645 \frac{\sigma}{\sqrt{k}}, \gamma = 1 - \alpha_{10} = 1 - \Phi(1,645 - t\sqrt{k}).$$

$$2) Z_j^{(0l)} = 7,5. \text{ Критична границя } A_Z(0,05) = 4,11. \text{ Гіпотеза відхиляється.}$$

3) $\gamma = \Phi(0,755) \approx 0,69$.

7.35. Відгук Z фільтра розподілений нормально з дисперсією σ^2 . Рівень фону дорівнює нулю. Приймається рішення про наявність аномалії у випадку перевищення відгуком критичної границі $A_Z(\alpha)$ при рівні значущості α . Обчислити:

1) $A_Z(0,05)$;

2) імовірність пропущення аномалії при $\alpha = 0,05$, якщо відношення сигнал/завада для неї дорівнює ρ .

3) Яким має бути ρ , щоб імовірність хибної аномалії дорівнювала 0,05?

Відповідь: 1) $A_Z(0,05) = 1,645\sigma$; 2) $\alpha_{10} = \Phi(1,645 - \sqrt{\rho})$;

3) $\rho = 4U_{0,95}^2 \approx 10,82$.

7.36. Відгук фільтра Z обчислюється як середнє арифметичне з k сусідніх спостережень поля, зведених до нульового фону. Дисперсія некорельованої завади дорівнює σ^2 . Математичне сподівання відгуку в області сигналу дорівнює $t\sigma$.

Визначити значення t , коли:

1) відношення сигнал/завада не менше 1;

2) надійність виділення сигналу при рівні значущості 0,05 критичної границі для Z не менше 0,9.

Відповідь: 1) $t \geq 1/\sqrt{k}$; 2) $t \geq (U_{0,9} + U_{0,95})/\sqrt{k}$.

7.37. Завада спостережень поля некорельована та розподілена нормально з дисперсією σ^2 . Рівень фону дорівнює m . Середнє перевищення поля над фоном в області аномалії дорівнює $t\sigma$. Аномалія виділяється за результатом \bar{y} усереднення k спостережень за виконання умови $\bar{y} > A_Z(0,025)$, де $A_Z(0,025)$ – критична границя значущості 0,025.

1) Розрахувати $A_Z(0,025)$ та визначити надійність виділення області аномалії, якщо їй належить лише l спостережень ($l \leq k$).

2) Виконати п. 1, якщо: $m = 10$, $\sigma = 5$, $t = 3$, $k = 4$, $l = 2$.

3) Виконати п. 1, якщо: $m = 10$, $\sigma = 5$, $t = 3$, $k = 9$, $l = 4$.

Відповідь: 1) $A_Z(0,025) = m + 1,96\sigma/\sqrt{k}$, $\gamma = \Phi\left(\frac{lt}{\sqrt{k}} - 1,96\right)$;

2) $A_Z(0,025) = 14,9$, $\gamma = \Phi(1,04) \approx 0,851$;

3) $A_Z(0,025) \approx 13,3$, $\gamma = \Phi(2,04) \approx 0,979$.

7.38. Для виявлення аномалій вживається критерій Котельникова у припущенні однакових апіорних імовірностей наявності або відсутності сигнала

лу. Надійність виявлення аномалії одним профілем $\gamma = 0,95$. Завади на сусідніх профілях некорельовані між собою й розподілені нормально. Визначити надійність виявлення аномалії з використанням того самого критерію при перетині її $k = 2$ профілями.

Вказівка. Відгук фільтра за k сусідніми профілями за відсутності взаємної кореляції завад між профілями можна подати у вигляді середнього арифметичного з відгуків, обчислених за окремими профілями.

Відповідь: $\gamma_k = \Phi(U_\gamma \sqrt{k}) \approx 0,99$.

7.39. Детермінований сигнал з перевищенням a над фоном має прямокутну форму. Нормально розподілена завада некорельована й має дисперсію σ^2 . Крок за профілем становить h . Апріорні ймовірності наявності та відсутності сигналу однакові.

Визначити мінімальну протяжність сигналу l , при якому надійність γ його виділення за критерієм Котельникова дорівнює $0,95$, якщо:

- 1) $a = \sigma$;
- 2) $a = 0,5\sigma$.

Відповідь: 1) $l = \frac{4 \cdot 1,645^2 \cdot \sigma^2}{a^2} h \approx 10,8h$; 2) $l \approx 43,2h$.

7.40. Спостереження $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}' = \bar{y}$ стаціонарного випадкового поля корельовані з коваріаційною матрицею \mathbf{B} . Визначити вектор $\bar{\beta} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k\}'$ лінійного перетворення $Z = \bar{\beta}' \bar{y}$, яке має мінімальну дисперсію за умови $\sum_{i=1}^k \beta_i = 1$. Визначити величину цієї дисперсії.

Відповідь: $\bar{\beta} = \mathbf{B}^{-1} \bar{e} / (\bar{e}' \mathbf{B}^{-1} \bar{e})$; $\mathbf{D}(\bar{\beta}' \bar{y}) = 1 / (\bar{e}' \mathbf{B}^{-1} \bar{e})$, де $\bar{e} = \{1, 1, \dots, 1\}'$.

7.41* На вхід фільтра надходять зведені до нульового фону спостереження y_1, y_2, \dots, y_n . У випадку наявності сигналу $\vec{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ $y_i = S_i + \delta_i$ ($\mathbf{M}\delta_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$). \mathbf{B} – коваріаційна матриця завади $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k\}'$. Ва-

гові коефіцієнти $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}' = \bar{c}$ фільтра $Z = \sum_{i=1}^k c_i y_i = \bar{c}' \bar{y}$ визначаються

так, щоб у випадку наявності сигналу математичне сподівання величини Z

було максимальним за умови $\mathbf{D}Z = 1$. Довести, що $\bar{c} = \frac{1}{\sqrt{\vec{S}' \mathbf{B}^{-1} \vec{S}}} \mathbf{B}^{-1} \vec{S}$.

7. Фільтрація випадкових функцій. Спектральні відображення

7.42. На вхід фільтра надходять спостереження y_1, y_2, \dots, y_n фізичного поля, зведені до нульового фону, які за наявності детермінованого сигналу $\vec{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ є сумою вигляду $y_i = S_i + \delta_i$ ($\mathbf{M}\delta_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$). \mathbf{B} – коваріаційна матриця гауссівської завади $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k\}$. Рішення про наявність сигналу приймається за умови $Z > A$, де $Z = \vec{c}'\vec{y}$, $\vec{c} = \mathbf{B}^{-1}\vec{S}$. Визначити критичну границю A , при якій сума ймовірностей помилок I-го та II-го роду мінімальна.

Відповідь: $A = 0,5\vec{S}'\mathbf{B}^{-1}\vec{S}$.

7.43. Відгук нормально розподіленого фільтра Z_j з оптимальними ваговими коефіцієнтами (7.29) удвічі менше відношення сигнал/завада. Чому дорівнює ймовірність наявності сигналу?

Вказівка. Використати формули (7.64) і (7.67).

Відповідь: 0,5.

7.44. Оптимальні вагові коефіцієнти фільтра $\vec{c} = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}'$ узгоджені із сигналом $\vec{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}'$. Спостереження $\vec{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}'$, які підлягають фільтрації, нормально розподілені й зведені до нульового фону. Для виділення аномалій застосовується критерій мінімуму суми ймовірностей помилок. Довести, що ймовірність відсутності сигналу становить

$$\mathbf{P}\{H_0 / \vec{y}\} = \frac{1}{1 + \exp(\vec{c}'(\vec{y} - \vec{S}/2))}.$$

7.45*. Спостереження y_1, y_2, \dots, y_k зведені до нульового фону. Гауссівська завада некорельована, її дисперсія – σ^2 . Фільтр $Z = \sum_{i=1}^k c_i y_i$ узгоджений із сигналом $\vec{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}'$. Показати, що апостеріорна ймовірність наявності аномалії має вигляд:

$$\mathbf{P}\{H_1 / Z\} = \frac{1}{1 + \exp\left(Z - 0,5 \sum_{i=1}^k S_i^2 \sigma^{-2}\right)}.$$

7.46. На вхід фільтра надходять спостереження y_1, y_2, \dots, y_n фізичного поля, зведені до нульового фону, які за наявності детермінованого сигналу $\vec{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}'$ є сумою: $y_i = S_i + \delta_i$ ($\mathbf{M}\delta_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$). \mathbf{B} – коваріаційна матриця завади $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k\}$. Для виділення сигналу використовується критерій Котельникова. Апріорні ймовірності наявності та відсутності сигналу вважаються однаковими. Визначити надійність виділення аномалії.

Відповідь: $\gamma = \Phi\left(0,5\sqrt{\vec{S}'\mathbf{B}^{-1}\vec{S}}\right)$.

7.47. Розв'язати попередню задачу, вважаючи заваду некорельованою. Дисперсія завади σ^2 .

Відповідь: $\gamma = \Phi\left(\frac{0,5}{\sigma}\sqrt{\sum_{i=1}^n S_i^2}\right)$.

7.48. На вхід фільтра надходять спостереження $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\} = \vec{Y}$, які дістали m методами й звели до нульового фону. Дисперсії завад $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2$, причому завади між собою некорельовані. Розв'язати задачу 7.46 для фільтра вигляду $\vec{Z} = \vec{c}'\vec{Y}$.

Відповідь: $\gamma = \Phi\left(0,5\sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{S_i^2}{\sigma_i^2}}\right)$.

7.49. У межах району досліджень апріорна ймовірність зустрічі аномалії $q_1 = 0,1$. Відношення сигнал/завада для фільтра, який використовується, $\rho = 4$. Для виділення аномалій застосовується критерій мінімуму середньої ймовірності помилки (Котельникова). Заваду розподілено нормально. Визначити:

- 1) ймовірність α_{01} помилкового виділення аномалії;
- 2) ймовірність α_{10} пропущення аномалії;
- 3) надійність виділення аномалії.

Відповідь: 1) $\alpha_{01} = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \ln \frac{q_1}{1-q_1} - \frac{\sqrt{\rho}}{2}\right)$;

2) $\alpha_{10} = \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{\rho}} \ln \frac{q_1}{1-q_1} - \frac{\sqrt{\rho}}{2}\right)$; 3) $\gamma = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \ln \frac{q_1}{1-q_1} + \frac{2}{\sqrt{\rho}}\right)$.

7.50* (задача проф. А.А. Нікітіна). A_Z – критична границя для обчислення сигналу за нормально розподіленим відгуком; ρ – відношення сигнал/завада.

- 1) Визначити ρ і A_Z , які забезпечують задані ймовірності: $\alpha_{10} = \alpha$ хибної аномалії та $\alpha_{10} = \beta$ пропущення аномалії.
- 2) Розв'язати п. 1 при $\alpha = 0,01$, $\beta = 0,05$.

Вказівка. Використати формули (7.69).

Відповідь: 1) $\rho = (U_\alpha + U_\beta)^2$, $A_Z = |U_\alpha(U_\alpha + U_\beta)|$. 2) $\rho \approx 15,8$, $h \approx 9,26$.

7.51. Для виділення аномалій використовується критерій мінімуму суми ймовірностей помилок. Відношення сигнал/завада дорівнює ρ_0 , надійність – γ_0 .

1) Яким буде відношення сигнал/завада, якщо ординати перевищення сигналу над фоном збільшаться у k разів? Яка при цьому надійність виділення сигналу?

2) У скільки разів мають зрости ординати перевищення сигналу над фоном, щоб надійність дорівнювала γ ($\gamma > \gamma_0$)?

Відповідь: 1) $\rho = k^2 \rho_0$, $\gamma = \Phi(k\sqrt{\rho_0}/2)$; 2) $k = U_\gamma / U_{\gamma_0}$.

7.52. Визначити мінімальне відношення сигнал/завада, при якому надійність виділення аномалій за критерієм Бейеса (Котельникова), який приводить до мінімуму суму ймовірностей похибок I-го та II-го роду, буде не менше 0,95.

Відповідь: $\rho_{\min} \approx 10,82$.

7.53. Спостереження y_1, y_2, \dots, y_n у точках фізичного поля x_1, x_2, \dots, x_n за профілем зведені до нульового фону. Завада некорельована, її дисперсія – σ^2 . Форма сигналу описується функцією $S(x - x_k)$.

Визначити математичне сподівання відгуку оптимального фільтра Z_k , який узгоджено із сигналом, якщо максимальним значення $\mathbf{M}Z_k$ буде при $k = j$.

Відповідь: $\mathbf{M}_j Z_k = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n S(x_i - x_k) S(x_i - x_j)$.

7.3. Фільтрація випадкового сигналу. Прогноз випадкової функції

Різниця між задачею фільтрації випадкового сигналу та задачею, яку розглянуто у підрозд. 7.2, полягає в тому, що моделлю сигналу служить випадкова функція $\xi(x)$, що спостерігається за наявності сигналу

$$\xi(x) = m(x) + \eta(x) + \delta(x), \quad (7.80)$$

де $m(x) = \mathbf{M}\xi(x)$ – математичне сподівання $\xi(x)$; $\eta(x)$, $\delta(x)$ – сигнал та завада, які є випадковими функціями з нульовим математичним сподіванням (порівняйте з (7.7)). Вважається, що $\eta(x)$ і $\delta(x)$ є взаємно некорельованими та стаціонарними. Як і у випадку детермінованого сигналу, фільтрацію починають зі зведення $\xi(x)$ до нульового математичного сподівання (нульового фону),

після чого розглядають реалізації $y(x)$ випадкової функції $\xi(x) - m(x)$. Із (7.80) випливає, що кореляційна функція випадкової функції $\xi(x)$ -

$$r_{\xi}(\tau) = r_{\eta}(\tau) + r_{\delta}(\tau), \quad (7.81)$$

де $r_{\eta}(\tau)$, $r_{\delta}(\tau)$ – кореляційні функції сигналу та завади.

Фільтр Вінера – Колмогорова. Згідно з (7.80),

$$y(x) = \eta(x) + \delta(x), \quad \mathbf{M}y(x) = 0. \quad (7.82)$$

Фільтр, який є лінійним перетворенням реалізації $y(x)$, визначається з таким розрахунком, щоб середній квадрат відхилення відгуку від значення сигналу в точці x_j був мінімальним: $\mathbf{M}(Z_j - \eta(x_j))^2 = \min$. Ця властивість забезпечується умовою ортогональності:

$$\mathbf{M}(Z_j - \eta(x_j))y(x) = 0. \quad (7.83)$$

Для неперервної реалізації на інтервалі $[a, b]$ $Z_j = \int_a^b c(t - x_j)y(t)dt$, і умова ортогональності приводить до інтегрального рівняння відносно вагової функції

$$\int_a^b c(t - x_j)r_y(x - t)dt = r_{\eta}(x - x_j), \quad (7.84)$$

де $r_y(x - t) = r_{\xi}(x - x_j)$ – кореляційна функція випадкової функції $\xi(x)$. Кореляційну функцію сигналу $r_{\eta}(\tau)$ можна дістати, якщо задано $r_{\delta}(\tau)$:

$$r_{\eta}(\tau) = r_y(\tau) - r_{\delta}(\tau).$$

Якщо кореляційна функція завади $r_{\delta}(\tau)$ невідома, то для обчислення $r_{\eta}(\tau)$ можна використати взаємну кореляційну функцію двох реалізацій $y_1(x)$ та $y_2(x)$, які містять один і той самий сигнал $\eta(x)$ та взаємно некорельовані завади: $r_{\eta}(\tau) = r_{12}(\tau)$.

Якщо реалізацію задано в дискретних точках x_1, x_2, \dots, x_n , то фільтр відносно точки x_j має вигляд

$$Z_j = \sum_{i=1}^k c_i y_i^{(j)} = \vec{c}' \vec{y}^{(j)}, \quad (7.85)$$

де $\vec{y}^{(j)} = \{y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, \dots, y_k^{(j)}\}$ – значення реалізації в точках, які належать інтервалу T_j , що займає фіксоване положення відносно x_j . З умови ортогональності

$$\mathbf{M}(Z_j - \eta(x_j))y_i^{(j)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (7.86)$$

впливає рівняння для визначення вектора вагових коефіцієнтів:

$$\mathbf{B}\vec{c} = \vec{d}_j, \quad (7.87)$$

7. Фільтрація випадкових функцій. Спектральні відображення

де \mathbf{B} – коваріаційна матриця спостережень $\{y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, \dots, y_k^{(j)}\}'$; $\vec{d}_j = \{d_{1j}, d_{2j}, \dots, d_{kj}\}$ – вектор коваріацій між $\eta(x_j)$ та значеннями сигналу $\{\eta_1^{(j)}, \eta_2^{(j)}, \dots, \eta_k^{(j)}\}$ у заданих точках; $d_{ij} = \text{cov}(\eta_i^{(j)}, \eta(x_j))$. Розв'язок рівняння (7.87): $\vec{c} = \mathbf{B}^{-1}\vec{d}_j$.

Середній квадрат відхилення відгуку Z_j від $\eta(x_j)$

$$\mathbf{M}(Z_j - \eta(x_j))^2 = \sigma_\eta^2 - \vec{c}'\vec{d}_j = \sigma_\eta^2 - \vec{d}_j'\mathbf{B}^{-1}\vec{d}_j, \quad (7.89)$$

де σ_η^2 – дисперсія сигналу. Якщо \mathbf{D} та \mathbf{G} – коваріаційні матриці сигналу $\bar{\eta}_j$ та завади $\bar{\delta}_j$, то

$$\mathbf{B} = \mathbf{D} + \mathbf{G}. \quad (7.90)$$

Фільтр максимуму відношення сигнал/завада. Відношення сигнал/завада (енергетичне) лінійного фільтра вигляду (7.85)

$$\mu = \mathbf{M}_1 Z_j^2 / \mathbf{M}_0 Z_j^2 = \frac{\vec{c}'\mathbf{B}\vec{c}}{\vec{c}'\mathbf{G}\vec{c}}, \quad (7.91)$$

де $\mathbf{M}_1 Z_j^2$, $\mathbf{M}_0 Z_j^2$ – середні квадрати відгуку за наявності та відсутності сигналу. Зважаючи на те, що $\mathbf{M}_1 Z_j = \mathbf{M}_0 Z_j = 0$, середні квадрати збігаються з дисперсіями: $\mathbf{M}_1 Z_j^2 = \mathbf{D}_1 Z_j$, $\mathbf{M}_0 Z_j^2 = \mathbf{D}_0 Z_j$. З (7.90) випливає

$$\mu = 1 + \lambda, \quad (7.92)$$

де

$$\lambda = \frac{\vec{c}'\mathbf{D}\vec{c}}{\vec{c}'\mathbf{G}\vec{c}}. \quad (7.93)$$

Максимуму μ набуває при коефіцієнтах $\vec{c} = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}'$, які дістають із рівняння

$$(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{G})\vec{c} = 0. \quad (7.94)$$

Розв'язок \vec{c} є власним вектором, який відповідає найбільшому власному значенню λ_0 . Останнє дістають з умови рівності нулю визначника матриці:

$$|\mathbf{D} - \lambda\mathbf{G}| = 0. \quad (7.95)$$

Умова єдиності розв'язку:

$$\mathbf{M}_0 Z_j^2 = \vec{c}'\mathbf{G}\vec{c} = 1. \quad (7.96)$$

Середні квадрати відгуку за відсутності та наявності сигналу:

$$\mathbf{M}_0 Z_j^2 = \vec{c}'\mathbf{G}\vec{c}, \quad \mathbf{M}_1 Z_j^2 = (\lambda_0 + 1)\mathbf{M}_0 Z_j^2; \quad (7.97)$$

відношення сигнал/завада:

$$\mu = 1 + \lambda_0. \quad (7.98)$$

Якщо завада некорельована й має дисперсію σ^2 , то (7.94) набуває вигляду

$$(\mathbf{D} - \lambda\sigma^2\mathbf{E})\vec{c} = 0 \quad (7.99)$$

(\mathbf{E} – одинична матриця). Проф. А.А. Нікітін запропонував спосіб *самоналагоджувальної фільтрації*, який базується на тому, що параметри аномалій та завод не задаються наперед, а оцінюються в ході обробки [24].

Задача прогнозу випадкової функції $y(x)$ полягає в оцінці її значення в точці x_0 , яка розміщена поза тим інтервалом $[a, b]$, де вона спостерігається. Мінімум середнього квадрата відхилення прогнозу Z_0 від прогнозованого значення $y(x_0)$ забезпечується умовою ортогональності:

$$\mathbf{M}(Z_0 - y(x_0))y(x) = 0 \quad (x \in [a, b]). \quad (7.100)$$

Якщо y_1, y_2, \dots, y_n – значення реалізації в точках x_1, x_2, \dots, x_n інтервалу $[a, b]$, то лінійний прогноз має вигляд $Z_0 = \sum_{i=1}^n c_i y_i$. Умова ортогональності

породжує систему рівнянь відносно коефіцієнтів c_1, c_2, \dots, c_n :

$$\mathbf{M}(Z_0 - y(x_0))y_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n c_i r(x_i - x_j) = r(x_0 - x_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \Leftrightarrow \mathbf{B}\vec{c} = \vec{r}_0, \quad (7.101)$$

де $r(\tau)$ – кореляційна функція випадкової функції $y(x)$, що спостерігається. Прогнозують на відстань, меншу за радіус автокореляції. При оптимальних коефіцієнтах c_1, c_2, \dots, c_n , які задовольняють (7.101),

$$\mathbf{M}(Z_0 - y(x_0))^2 = r(0) - \vec{c}'\vec{r}_0 = \sigma^2 - \vec{c}'\vec{r}_0. \quad (7.102)$$

Множинний коефіцієнт кореляції, який характеризує якість прогнозу, виражається через вектор $\vec{r}_0^{(N)} = \vec{r}_0 / \sigma^2$ значень нормованої кореляційної функції:

$$R_0 = \sqrt{\vec{c}'\vec{r}_0^{(N)}}. \quad (7.103)$$

Приклад 7.54. Коефіцієнти оптимального фільтра Вінера – Колмогорова обчислюються для трьох спостережень поля, віддалених одне від одного за профілем на відстань Δ . Кореляційна функція $r_\eta(\tau)$ і $r_\delta(\tau)$ сигналу та завади такі, що $r_\eta(0) = 4$, $r_\eta(\Delta) = 2$, $r_\eta(2\Delta) = 0$, $r_\delta(0) = 1$, $r_\delta(\Delta) = 0,5$, $r_\delta(2\Delta) = 0$.

1) Визначити коефіцієнти c_1, c_2, c_3 оптимального фільтра Вінера – Колмогорова відносно точки x_j , яка є середньою з трьох точок, що обробляються.

2) Обчислити середній квадрат відхилення відгуку цього фільтра від значення сигналу в точці x_j .

3) Обчислити відношення сигнал/завада.

Розв'язання. 1) Кореляційна функція поля, що спостерігається, $r_y(\tau) = r_\eta(\tau) + r_\delta(\tau)$. Отже $r_y(0) = 5$, $r_y(\Delta) = 2,5$, $r_y(2\Delta) = 0$. Матриця \mathbf{V} та вектор коваріацій сигналу \vec{d}_j :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} r_y(0) & r_y(\Delta) & r_y(2\Delta) \\ r_y(\Delta) & r_y(0) & r_y(\Delta) \\ r_y(2\Delta) & r_y(\Delta) & r_y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2,5 & 0 \\ 2,5 & 5 & 2,5 \\ 0 & 2,5 & 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{d}_j = \begin{pmatrix} r_\eta(\Delta) \\ r_\eta(0) \\ r_\eta(\Delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Система рівнянь (7.87) для коефіцієнтів фільтра:

$$\begin{cases} 5c_1 + 2,5c_2 = 2, \\ 2,5c_1 + 5c_2 + 2,5c_3 = 4, \\ 2,5c_2 + 5c_3 = 2. \end{cases}$$

Розв'язок: $c_1 = 0$, $c_2 = 0,8$, $c_3 = 0$. $\vec{c}' = \{0, 0,8, 0\}$.

2) За формулою (7.89)

$$\mathbf{M}(Z_j - \eta(x_j))^2 = \sigma_\eta^2 - \vec{c}'\vec{d} = r_\eta(0) - (0 \cdot 2 + 0,8 \cdot 4 + 0 \cdot 2) = 0,8.$$

3) Відношення сигнал/завада за формулою (7.91)

$$\mu = \frac{\sum_{i,j=1}^3 c_i b_{ij} c_j}{\sum_{i,j=1}^3 c_i g_{ij} c_j} = \frac{c_2^2 b_{22}}{c_2^2 g_{22}} = \frac{r_y(0)}{r_\delta(0)} = 5.$$

Приклад 7.55. Спостереження поля y_1, y_2, \dots, y_n в точках x_1, x_2, \dots, x_n із кроком Δ зведені до нульового фону. Завада некорельована та має дисперсію σ^2 . Кореляційна функція $r_y(0) = 3\sigma^2$, $r_y(\Delta) = \sigma^2$, $r_y(\tau) = 0$ при $\tau \geq 2\Delta$.

1) Обчислити вагові коефіцієнти c_1, c_2 фільтра максимуму відношення сигнал/завада.

2) Обчислити відношення сигнал/завада.

Розв'язання. 1) Згідно з (7.81), кореляційна функція сигналу $r_\eta(0) = r_y(0) - r_\delta(0) = 3\sigma^2 - \sigma^2 = 2\sigma^2$, $r_\eta(\Delta) = r_y(\Delta) - r_\delta(\Delta) = \sigma^2$. Коваріаційна матриця сигналу

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} r_\eta(0) & r_\eta(\Delta) \\ r_\eta(\Delta) & r_\eta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sigma^2 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 2\sigma^2 \end{pmatrix}.$$

З рівняння (7.95)

$$|\mathbf{D} - \lambda\sigma^2\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2\sigma^2 - \lambda\sigma^2 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 2\sigma^2 - \lambda\sigma^2 \end{vmatrix} = \sigma^4(2 - \lambda)^2 - \sigma^4 = 0 \Rightarrow |2 - \lambda| = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

$$\lambda_0 = \max(\lambda_1, \lambda_2) = 3.$$

З рівняння (7.99), підставляючи $\lambda = \lambda_0 = 3$, маємо

$$\begin{pmatrix} 2\sigma^2 - \lambda_0\sigma^2 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 2\sigma^2 - \lambda_0\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \sigma^2 \begin{pmatrix} 2 - \lambda_0 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c_1 = c_2.$$

Умова єдності розв'язку:

$$\vec{c}'\mathbf{G}\vec{c} = \sigma^2\vec{c}'\mathbf{E}\vec{c} = \sigma^2(c_1^2 + c_2^2) = 1 \Rightarrow c_1 = c_2 = 1/(\sigma\sqrt{2}).$$

2) Згідно з (7.89), $\mu = 1 + \lambda_0 = 4$.

Приклад 7.56. Довести, що вагові коефіцієнти фільтра $Z = \vec{c}'\vec{y}$, який забезпечує максимум відношення сигнал/завада, за умови $\mathbf{M}_0 Z^2 = 1$ є розв'язком рівняння (7.94) при λ , яке дорівнює найбільшому кореню λ_0 рівняння (7.95). Показати, що відношення сигнал/завада цього фільтра дорівнює $\lambda_0 + 1$.

Розв'язання. $\mathbf{M}_1 Z^2 = \mathbf{M}\vec{c}'\vec{y} = \vec{c}'\mathbf{B}\vec{c} = \vec{c}'(\mathbf{D} + \mathbf{G})\vec{c} = \vec{c}'\mathbf{D}\vec{c} + \vec{c}'\mathbf{G}\vec{c}$, де \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{G} – коваріаційні матриці спостережень, сигналу та завади відповідно; $\mathbf{M}_0 Z^2 = \vec{c}'\mathbf{G}\vec{c} = 1$. $\mu = (\vec{c}'\mathbf{D}\vec{c} + \vec{c}'\mathbf{G}\vec{c}) / (\vec{c}'\mathbf{G}\vec{c}) = 1 + \vec{c}'\mathbf{D}\vec{c} / \vec{c}'\mathbf{G}\vec{c}$.

Оскільки $\vec{c}'\mathbf{G}\vec{c} = 1$, то треба звести до мінімуму $\vec{c}'\mathbf{D}\vec{c}$ за умови $\vec{c}'\mathbf{D}\vec{c} = 1$. Позначимо $\varphi = \vec{c}'\mathbf{D}\vec{c} + \lambda(1 - \vec{c}'\mathbf{G}\vec{c})$. $\frac{d\varphi}{d\vec{c}} = 0 \Rightarrow \mathbf{D}\vec{c} - \lambda\mathbf{G}\vec{c} = 0 \Rightarrow (\mathbf{D} - \lambda\mathbf{G})\vec{c} = 0$.

Ненульовий розв'язок існує при $|\mathbf{D} - \lambda\mathbf{G}| = 0$ (власний вектор). Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – власні числа, причому $\lambda_0 = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$: $\mathbf{D}\vec{c} = \lambda\mathbf{G}\vec{c}$. Домножуючи на \vec{c}' , дістанемо: $\vec{c}'\mathbf{D}\vec{c} = \lambda_i \vec{c}'\mathbf{G}\vec{c}$. Отже, $\lambda_i = \vec{c}'\mathbf{D}\vec{c}$, і при максимальному λ $\mathbf{M}_1 Z^2 = \vec{c}'\mathbf{D}\vec{c}$ буде максимальним, що й треба було довести.

7.57. Випадкова функція $\xi(x)$ є сумою некорельованих сигналу та завади: $\xi(x) = m(x) + \eta(x) + \delta(x)$, де $m(x) = \mathbf{M}\xi(x)$; $\eta(x)$, $\delta(x)$ – сигнал і завада, які є випадковими функціями з нульовим математичним сподіванням, $\mathbf{D}\xi(x) = \sigma_\xi^2$ та $\mathbf{D}\delta(x) = \sigma_\delta^2$. Знайти дисперсію $\mathbf{D}\eta(x)$ сигналу.

7. Фільтрація випадкових функцій. Спектральні відображення

7.58. Кореляційна функція випадкової функції, що спостерігається, $cr(\tau)$; кореляційна функція завади – $c_{\delta}r(\tau)$. Чому дорівнює кореляційна функція сигналу?

7.59. Радіус автокореляції сигналу a , завади – b ($a > b$). Кореляційні функції сигналу та завади невід’ємні. Чому дорівнює радіус автокореляції випадкової функції, що спостерігається і є сумою сигналу та завади?

7.60. Взаємна кореляційна функція двох реалізацій, які містять той самий сигнал і некорельовані між собою завади, дорівнює $ce^{-\lambda\tau}$. Чому дорівнює кореляційна функція сигналу?

7.61. Чому дорівнює енергетичне відношення сигнал/завада μ за відсутності сигналу?

7.62. Коефіцієнти \vec{c} фільтра $Z = \vec{c}'\vec{y}$ обчислено таким чином, що за відсутності сигналу $\mathbf{M}_0 Z^2 = 1$. Відношення сигнал/завада дорівнює 5. Чому дорівнює середній квадрат $\mathbf{M}_1 Z^2$ відгуку за наявності сигналу?

7.63. Перетин фізичного поля $\xi_1(x)$ та $\xi_2(x)$ уздовж двох профілів є реалізацією випадкових функцій вигляду $\xi_1(x) = \eta(x) + \delta_1(x)$, $\xi_2(x) = \eta(x+t) + \delta_2(x)$, де $\delta_1(x)$, $\delta_2(x)$ – некорельовані між собою завади з кореляційною функцією $r_0(\tau)$; $\eta(x)$ – сигнал з кореляційною функцією $r_{\eta}(\tau)$, $r_{12}(\tau)$ – взаємна кореляційна функція $\xi_1(x)$ і $\xi_2(x)$, $r_{\xi}(\tau)$ – кореляційна функція $\xi(x)$.

Довести: 1) $r_{\eta}(\tau) = r_{12}(\tau - t)$; 2) $r_{\delta}(\tau) = r_{\xi}(\tau) - r_{12}(\tau - t)$.

7.64. Спостереження поля y_1, y_2, \dots, y_n дістали з кроком Δ за профілем у точках x_1, x_2, \dots, x_n та звели до нульового фону. Завада некорельована й має дисперсію σ^2 . Кореляційна функція реалізації $r_y(\tau)$ дорівнює нулю при $\tau \geq 2$, причому $r_y(0) = 5\sigma^2$, $r_y(\Delta) = 2\sigma^2$.

1) Обчислити коефіцієнти лінійного фільтра Вінера – Колмогорова вигляду $Z_j = c_1 y_{j-1} + c_2 y_j$ для фільтрації в точці x_j за двома значеннями y_{j-1}, y_j .

2) Обчислити значення відгуку Z_j для такого ряду y_j :

1 -1 1,5 0,5 -1 -0,5 2 4 2

3) Обчислити середній квадрат відхилення відгуку Z_j від значення сигналу в точці x_j .

4) Визначити відношення сигнал/завада.

Відповідь: 1) $c_1 \approx 0,095$, $c_2 \approx 0,762$.

2)

J	2	3	4	5	6	7	8	9
Z_j	-0,67	1,05	0,52	-0,71	-0,48	1,48	3,24	1,9

3) $\mathbf{M}((Z_j - \eta(x_j))^2) = 16\sigma^2/21$; 4) $\mu \approx 5,5$.

7.65. За даними задачі 7.64 розрахувати фільтр Вінера – Колмогорова в точці x_j за трьома спостереженнями y_{j-2}, y_{j-1}, y_j . Обчислити відношення сигнал/завада.

Відповідь: $Z_j = -0,047y_{j-2} + 0,118y_{j-1} + 0,753y_j$. $\mu = 5,57$.

7.66. За даними задачі 7.64 обчислити вагові коефіцієнти c_1, c_2, c_3 фільтра максимуму відношення сигнал/завада. Обчислити відношення сигнал/завада.

Відповідь: $c_1 = c_3 = 0,5, c_2 = 2$. $\mu = 3 + \sqrt{2}$.

7.67. Випадкова функція $y(x)$ є сумою двох стаціонарних функцій з нульовим середнім: $y(x) = \eta(x) + \delta(x)$; $\eta(x)$ – сигнал, який є випадковою функцією з нульовим середнім. Відгук фільтра обчислюється у вигляді $Z = \sum_{i=1}^n c_i y(x_i)$. Показати, що середній квадрат відхилення $\mathbf{M}(Z - \eta(x_j))^2$ є

мінімальним за умови $\sum_{i=1}^n c_i r_y(x_i - x_k) = r_{\eta y}(x_j, x_k)$, де $r_y(\tau)$ – кореляційна функція $y(x)$, $r_{y\eta}(x_j, x_k)$ – взаємна кореляційна функція $y(x)$ і $\eta(x)$.

7.68. Марковський випадковий процес $y(x)$ ($\mathbf{M}y(x) = 0$) спостерігається на інтервалі $[0, T]$ і має кореляційну функцію $r(\tau) = \sigma^2 e^{-\lambda|\tau|}$. Довести, що оптимальний лінійний прогноз у точці x_0 ($x_0 > T$) має вигляд $Z_0 = e^{\lambda(T-x_0)} \cdot y(T)$. Знайти середній квадрат відхилення Z_0 від $y(x_0)$.

Відповідь: $\mathbf{M}(Z_0 - y(x_0))^2 = \sigma^2(1 - e^{2\lambda(T-x_0)})$.

7.69. Залежність середньомісячних рівнів ґрунтових вод описується гаусівською випадковою функцією вигляду $\xi(t) = m(t) + y(t)$, де $m(t) = \mathbf{M}\xi(t)$ – математичне сподівання $\xi(t)$; $y(t)$ – випадкова функція з нульовим математичним сподіванням, $t = 1, 2, \dots, 12$. Показати, що оптимальний прогноз на травень ($t = 5$) за спостереженнями $\xi(i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) у січні–квітні має вигляд $\tilde{Z}(5) = m(5) + \sum_{i=1}^4 c_i (\xi(i) - m(i))$, де $\vec{c} = \mathbf{B}\vec{r}_5$, $\vec{r}_5 = \{r(5-i)\}$, $\mathbf{B} = \{r(i-j)\}$, $i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4$; $r(\tau)$ – кореляційна функція $\xi(t)$.

Чому дорівнює похибка цього прогнозу при довірчій імовірності 0,95?

Відповідь: $A_{0,95} = 1,96 \sqrt{r(0) - \sum_{i=1}^4 r(5-i)}$.

7.4. Спектральне відображення випадкової функції

Нехай $y(x)$ – стаціонарна випадкова функція з нульовим математичним сподіванням, яка спостерігається на інтервалі $[0, T]$. Подібно розкладу в ряд Фур'є невідповідної функції, $y(x)$ можна зобразити у вигляді

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k x + V_k \sin \omega_k x), \quad (7.103)$$

де U_k, V_k – випадкові величини з нульовим математичним сподіванням, некорельовані між собою:

$$\mathbf{M}U_k V_j = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots); \quad \mathbf{M}U_k U_j = 0 = \mathbf{M}V_k V_j \quad (k \neq j), \quad (7.104)$$

$$U_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(x) \cos \omega_k x dx, \quad V_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(x) \sin \omega_k x dx, \quad U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y(x) dx,$$

$\omega_k = \frac{2\pi}{T} k$ ($k = 1, 2, \dots$) – частоти гармонік, які беруть участь у відображенні (7.103).

Після перетворень формула (7.103) набуває вигляду

$$y(x) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} W_k \cos(\omega_k x + \varphi_k), \quad (7.105)$$

де $W_k = \sqrt{U_k^2 + V_k^2}$ – випадкова амплітуда гармоніки з частотою ω_k , $\varphi_k = \arctg(-V_k / U_k)$ – її фаза. Із (7.104) випливає, що випадкова функція $y(x)$ є сумою гармонік з випадковими амплітудами та фазами.

Кореляційну функцію можна подати у вигляді

$$r(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau, \quad (7.106)$$

де

$$D_k = \mathbf{D}U_k = \mathbf{D}V_k = \frac{2}{T} \int_0^T r(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau \quad (k = 1, 2, \dots), \quad D_0 = \mathbf{D}U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T r(\tau) d\tau.$$

Залежність дисперсій D_k від частот ω_k ($k = 0, 1, \dots$) утворює *спектр випадкової функції*. Крок спектра $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ називається *основною частотою*. З (7.106) випливає, що

$$r(0) = \mathbf{D}y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k. \quad (7.107)$$

Використовуючи спектральний розклад, фільтр Вінера – Колмогорова можна подати так:

$$Z = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t), \quad (7.108)$$

де

$$Z_k = \frac{D_{k\eta}}{D_{ky}} = \frac{D_{k\eta}}{D_{k\eta} + D_{k\delta}} = \frac{D_{ky} - D_{k\delta}}{D_{ky}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.109)$$

$D_{k\eta}$, $D_{k\delta}$, D_{ky} – коефіцієнти розкладу в ряд Фур'є за косинусами кореляційних функцій відповідно завади, сигналу та випадкової спостережуваної функції $y(x)$, яка є сумою завади й сигналу.

При $T \rightarrow \infty$ $\omega_1 \rightarrow 0$, і замість спектра випадкової функції використовується *спектральна щільність*

$$W(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} r(\tau) \cos \omega\tau d\tau = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_0^{\infty} r(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right). \quad (7.110)$$

Кореляційна функція виражається через спектральну щільність:

$$r(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_0^{\infty} W(\omega) \cos \omega\tau d\omega; \quad r(0) = \int_0^{\infty} W(\omega) d\omega. \quad (7.111)$$

Наприклад, для спектральної щільності найпростішої прямокутної форми, заданої на інтервалі $[\omega_0, \omega_0 + \Delta]$,

$$W(\omega) = \begin{cases} \sigma^2 / \Delta, & \text{якщо } \omega_0 \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta, \\ 0, & \text{якщо } \omega < \omega_0, \text{ або } \omega \geq \omega_0 + \Delta; \end{cases}$$

$$r(\tau) = \frac{2\sigma^2}{\Delta\tau} \sin \frac{\Delta\tau}{2} \cos \left(\omega_0\tau + \frac{\Delta\tau}{2} \right).$$

При $\Delta \rightarrow 0$ $W(\omega)$ стає δ -функцією: $W(\omega) = \sigma^2 \delta(\omega - \omega_0)$, а $r(\tau) = \sigma^2 \cos \omega_0\tau$ (кореляційна функція простого гармонічного коливання). При $\Delta \rightarrow \infty$ кореляційна функція прямує до функції:

$$r(\tau) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{якщо } \tau = 0, \\ 0, & \text{якщо } \tau \neq 0; \end{cases} \quad W(\omega) \rightarrow 0 \text{ при } \int_0^{\infty} W(\omega) d\omega \rightarrow \sigma^2.$$

Випадковий процес з такою спектральною щільністю називається *білим шумом*.

У ході розрахунку фільтра, який призначено для фільтрації неперервної реалізації, треба розв'язувати інтегральне рівняння з інтегралом типу згортки в лівій частині (7.79), (7.84). Окрім числового розв'язання, яке базується на його зведенні до системи лінійних рівнянь, застосовують метод перетворень Фур'є, який дає можливість до того ж отримати так звану *частотну характеристику фільтра*. Інтеграл вигляду

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t)r(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} c(x-t)r(t)dt \quad (7.112)$$

називається *згортькою функцій* $c(x)$ і $r(x)$. Перетворення Фур'є виражається через спектральну щільність: $G(v) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i2\pi v\tau} d\tau = \pi g_W(2\pi v)$, де $g_W(v)$ – спектральна щільність (*частотна характеристика*) функції $g(x)$. Вихідна функція відновлюється за її перетворенням Фур'є:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(v)e^{2\pi i v x} dv = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g_W(\omega)e^{i\omega x} d\omega, \quad (7.113)$$

де

$$g_W(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\omega x} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} g(x) \cos \omega x dx.$$

Згідно з теоремою Бореля про згортку, її перетворення Фур'є дорівнює добутку перетворень підінтегральних функцій:

$$g_F(v) = c_F(v) \cdot r_F(v) \Rightarrow c_F(v) = \frac{g_F(v)}{r_F(v)} = \frac{g_W(2\pi v)}{r_W(2\pi v)}. \quad (7.114)$$

Отже, розв'язком рівняння (7.112) буде

$$\begin{aligned} c(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} c_F(v)e^{2\pi i v x} dv = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_F(v)}{r_F(v)} e^{2\pi i v x} dv = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_W(2\pi v)}{r_W(2\pi v)} e^{2\pi i v x} dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_W(\omega)}{r_W(\omega)} e^{i\omega x} d\omega. \end{aligned}$$

Згідно з (7.113), маємо вираз частотної характеристики функції $c(x)$ у рівнянні (7.112):

$$c_W(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{g_W(\omega)}{r_W(\omega)}, \quad (7.115)$$

причому

$$c(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} c_W(\omega) e^{i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} c_W(\omega) \cos \omega x d\omega. \quad (7.116)$$

Використовуючи цей результат для узгодження фільтра з детермінованим сигналом (рівняння (7.79) при $a = -\infty$, $b = -\infty$, тобто $c(x) = 0$ поза $[a, b]$), дістанемо вираз вагової функції через її частотну характеристику $c_W(\omega)$:

$$c(x - x_j) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} c_W(\omega) e^{i\omega(x-x_j)} d\omega, \quad (7.117)$$

де

$$c_W(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{S_W(\omega)}{r_W^{(\delta)}(\omega)}; \quad (7.118)$$

$r_W^{(\delta)}(\omega)$ – спектральна щільність завади; $S_W(\omega)$ – частотна характеристика

$$\text{сигналу: } r_W^{(\delta)}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r_{\delta}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad S_W(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Аналогічно, частотна характеристика фільтра Вінера – Колмогорова:

$$c_W(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{r_W^{(n)}(\omega)}{r_W^{(y)}(\omega)} = \frac{1}{\pi} \frac{r_W^{(n)}(\omega)}{r_W^{(n)}(\omega) + r_W^{(\delta)}(\omega)},$$

де $r_W^{(n)}(\omega)$ – спектральна щільність сигналу. Вагова функція фільтра обчислюється за формулою (7.117).

Задачі для самостійного розв'язання

7.70. Яка кореляційна функція білого шуму? Чому дорівнює коваріація значень білого шуму у двох різних точках, які спостерігаються?

7.71. Довести формулу (7.106) для відображення випадкової функції (7.103).

7.72. Довести формулу (7.107).

7. Фільтрація випадкових функцій. Спектральні відображення

7.73. $D_0, D_1, \dots, D_k, \dots$ – коефіцієнти розкладу в ряд Фур'є за косинусами кореляційної функції випадкового процесу $\xi(t)$. Чому дорівнює відношення $\mathbf{D}\xi(t) / \sum_{k=0}^{\infty} D_k$?

7.74. Випадкова функція має вигляд $y(x) = U \cos \omega_0 x_2 + V \sin \omega_0 x$, де U та V – незалежні випадкові величини; $\mathbf{M}U = \mathbf{M}V = 0$, $\mathbf{D}U = \mathbf{D}V = \sigma^2$. Якими є її кореляційна функція та спектральна щільність?

7.77. Залежність середньорічних рівнів $\xi(t)$ ґрунтових вод від часу t у годинах оцінюється у вигляді

$$\begin{aligned} \xi(t) = & 1,59 + 0,35 \cos\left(\frac{2\pi}{3}t - 4,49\right) + 0,47 \cos\left(\frac{\pi}{2}t - 2,89\right) + \\ & + 0,26 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - 0,31\right) + 0,12 \cos\left(\frac{\pi}{20}t - 2,32\right) + \Delta \text{ (м)}, \end{aligned}$$

причому $\mathbf{M}\Delta = 0$, $\sigma(\Delta) = 0,15$ м; фази в радіанах; для 1988 р. $t = 0$.

1) Визначити періоди складових гармонік у порядку спадання амплітуд.

2) Розрахувати довгостроковий прогноз на 2018 р. із вказівкою похибки прогнозу при $q = 0,95$ (Δ – нормально розподілена величина).

Відповідь: 1) $T_1 = 4$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 40$ (років); 2) $\check{\xi}(30) = 1,22 \pm 0,3$.

7.78*. Обчислити спектральну щільність випадкової функції, яка має кореляційну функцію вигляду:

$$1) \quad r(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 \left(1 - \frac{\tau}{a}\right), & |\tau| < a, \\ 0, & |\tau| \geq a; \end{cases}$$

2) $r(\tau) = \sigma^2 \exp(-\lambda|\tau|)$ (кореляційна функція марковського випадкового процесу);

3) $r(\tau) = e^{-\alpha\tau} \cos\beta\tau$ (кореляційна функція сейсмічних сигналів);

$$4) \quad r(\tau) = \sigma^2 e^{-\tau^2/a^2}.$$

Вказівка. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt^2} e^{-i\omega t} dt = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\omega^2/p}.$

Відповідь: 1) $W(\omega) = \frac{4\sigma^2}{\pi a \omega^2} \sin \frac{\omega a}{2}$; 2) $W(\omega) = \frac{\sigma^2 \lambda}{\pi(\lambda^2 + \omega^2)}$;

$$3) W(\omega) = \frac{\lambda\sigma^2}{2\pi} \left(\frac{1}{\lambda^2 + (\omega + \beta)^2} + \frac{1}{\lambda^2 + (\omega - \beta)^2} \right); \quad 4) W(\omega) = \frac{a\sigma^2}{\sqrt{\pi}} e^{-\omega^2 a^2 / 4}.$$

7.79. Кореляційні функції випадкового сигналу та завади становлять відповідно $r_{\eta}(\tau) = \sigma^2 \exp(-\tau^2 / a^2)$, $r_{\delta}(\tau) = \sigma_0^2 \exp(-\tau^2 / p^2)$. Визначити частотну характеристику Вінера – Колмогорова.

Відповідь:
$$\frac{1}{\pi} \frac{\alpha\sigma^2 \exp(-\alpha^2\omega^4 / 4)}{\alpha\sigma^2 \exp(-\alpha^2\omega^2 / 4) + \rho\sigma_0^2 \exp(-\rho^2\omega^2 / 4)}.$$

7.80¹. Кореляційні функції сигналу та завади становлять відповідно $r_{\eta}(\tau) = \sigma^2 \exp(-\tau^2 / \alpha^2)$, $r_{\delta}(\tau) = \sigma_0^2 \exp(-\tau^2 / \rho^2)$, причому $\rho = 1$, $a = 5$. Визначити частотну характеристику фільтра Вінера – Колмогорова та виразити через неї вагову функцію.

Відповідь:
$$c_w(\omega) = \frac{1}{\pi(1 + 0,2e^{\sigma\omega^2})};$$

$$c(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} c_w(\omega) e^{i\omega(x-x_j)} d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x d\omega}{\pi(1 + 0,2 \exp(\sigma\omega^2))}.$$

7.5. Варіограма. Поняття про оцінку запасів руд методом крейгінга

Випадкове поле $\xi(\vec{x})$ є *однорідним*, якщо його математичне сподівання стало, а кореляційна функція $r(\vec{x}, \vec{y})$ залежить тільки від різниці $\vec{h} = \vec{y} - \vec{x}$: $r(\vec{x}, \vec{y}) = r(\vec{h})$. Однорідність означає те ж саме, що й стаціонарність випадкової функції однієї змінної. Якщо кореляційна функція залежить тільки від відстані $h = \rho(\vec{x}, \vec{y})$ між точками \vec{x} і \vec{y} , то випадкове поле називається *однорідним* та *ізотропним*.

¹ Задачу запропоновано проф. А.А. Нікітіним.

7. Фільтрація випадкових функцій. Спектральні відображення

Варіограма – функція, яка описує залежність середнього квадрата різниці значень випадкового поля у двох точках від відстані та напрямку між цими точками:

$$\gamma(\vec{h}) = \mathbf{M}(\xi(\vec{x} + \vec{h}) - \xi(\vec{x}))^2, \quad (7.119)$$

де \vec{h} – вектор, що сполучає точки \vec{x} та $\vec{x} + \vec{h}$.

Властивості варіограми та кореляційної функції:

$$\gamma(\vec{h}) = \gamma(-\vec{h}), \quad r(\vec{h}) = r(-\vec{h}); \quad (7.120)$$

$$\gamma(\vec{h}) = 2(r(0) - r(\vec{h})), \quad r(h) = r(0) - 0,5\gamma(h); \quad (7.121)$$

$$\mathbf{D}\xi(\vec{x}) = r(\vec{0}); \quad \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^n a_i \xi_i(\vec{x})\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j r(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \quad (7.122)$$

Для руд з неперервним розподілом вмістів (розсіяна мінералізація) $\gamma(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \gamma(\vec{h}) = 0$. Для руд з вираженою локальною мінливістю $\gamma(+0) > 0$.

Цей ефект називають *ефектом самородків*.

Формула Крейга:

$$\sigma^2(V_1/V_m) = \sigma^2(V_1/V_2) + \sigma^2(V_2/V_m), \quad (7.123)$$

де $\sigma^2(V_i/V_j)$ – дисперсія вмісту блоків об'ємом V_i , які містяться у блоках об'ємом V_j . Вміст блока – це усереднений вміст по блоку. Для точкових проб, які відбираються в межах блока об'ємом V_0 ,

$$\begin{aligned} \sigma^2(0/V_m) &= \sigma^2(0/V_0) + \sigma^2(V_0/V_m) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sigma^2(V_0/V_m) = \sigma^2(0/V_m) - \sigma^2(0/V_0) \end{aligned} \quad (7.124)$$

Коваріація між вмістом у точці \vec{x} та вмістом блока об'ємом V

$$\mathbf{cov}(V, \vec{x}) = \frac{1}{V} \int_V r(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} = r(0) - 0,5 \int_V \gamma(\vec{t} - \vec{x}) d\vec{t}, \quad (7.125)$$

а коваріація між вмістами двох блоків становить

$$\mathbf{cov}(V_1, V_2) = \frac{1}{V_1 V_2} \int_{V_1} \int_{V_2} r(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y} = r(0) - 0,5 \int_{V_1} \int_{V_2} \gamma(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y}. \quad (7.126)$$

Оптимізація оцінювання методом крейгінга. Блок об'ємом V має невідомий вміст $Z(V)$ і опробований пробами в точках \vec{x}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) із вмістом $y(\vec{x}_i)$ у них. Оцінка $Z(V)$ має вигляд

$$\tilde{Z}(V) = \sum_{i=1}^n c_i y(\vec{x}_i) = \vec{c}'\vec{y} \quad (7.127)$$

за умови $\sum_{i=1}^n c_i = 1$. Середній квадрат відхилення

$$\mathbf{D}(\check{Z} - Z) = \mathbf{M}(\check{Z}(V) - Z(V))^2 = \sigma_V^2 - 2 \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{cov}(v, \bar{x}_i) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_i r(\bar{x}_i, \bar{x}_j) c_j, \quad (7.128)$$

де $\sigma_V^2 = \mathbf{M}(Z(V))^2$. Мінімум $\mathbf{M}((\check{Z}(V) - Z(V))^2$ досягається при коефіцієнтах c_1, c_2, \dots, c_n , які визначаються із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \mathbf{B}\vec{c} = \vec{b}_V + \lambda \vec{e}, \\ \sum_{i=1}^n c_i = 1; \end{cases}$$

де $\mathbf{B} = \{r(\bar{x}_i, \bar{x}_j)\}$, $\vec{b}_V = \{\mathbf{cov}(V, \bar{x}_i)\}$, $\vec{e} = \{1, 1, \dots, 1\}'$.

При цьому

$$\mathbf{M}((\check{Z}(V) - Z(V))^2 = \sigma_V^2 - \vec{c}\vec{b}_V + \lambda. \quad (7.129)$$

За оцінками $\check{Z}(V_i)$ розраховують оцінку запасів та її дисперсію.

Для підвищення ефективності крейгінг поєднують із тренд-аналізом [9].

Ізотропні моделі. Варіограма $\gamma(h)$ ізотропного випадкового поля залежить лише від відстані h між точками. Інтервал $[0, a]$ значень h , де $\gamma(h)$ зберігає монотонність, називається *інтервалом впливу*. Поза ним $\gamma(h) = \text{const}$ і $r(h) = 0$, тобто права границя інтервалу a збігається з радіусом автокореляції.

1. *Модель де Війса:*

$$\lambda(h) = A \ln h + B. \quad (7.130)$$

2. *Експоненціальна модель:*

$$\gamma(h) = c_0 + c(1 - \exp(-h/a)). \quad (7.131)$$

3. *Сферична модель:*

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & , h = 0, \\ c(1,5h/a - 0,5h^3/a^3) + c_0, & 0 < h \leq a, \\ c + c_0 & , h > a. \end{cases} \quad (7.132)$$

Задачі для самостійного розв'язання

7.81. Чому дорівнює значення варіограми $\gamma(h)$ при $h = 0$ для неперервного випадкового поля?

7.82. Дисперсія поля $r(0) = \sigma^2$; кореляційна функція $r(h) = \frac{3}{4}\sigma^2$. Знайти варіограму $\gamma(h)$.

7.83. Чому дорівнює $\gamma(h)$, якщо h перевищує радіус автокореляції?

7.84. Як визначити дисперсію випадкового поля за варіограмою, заданою на інтервалі впливу?

7.85. Дисперсія вмістів точкових проб у межах покладу дорівнює $4\sigma^2$, а в межах блоків – σ^2 . Яка дисперсія вмістів блоків?

7.86. Показати, що якщо точка \bar{x} віддалена від найближчої границі блока далі ніж на радіус автокореляції, то коваріація $\text{cov}(v, \bar{x})$ між вмістом у точці x та вмістом блока не залежить від \bar{x} .

7.87*. Довести формули 1) (7.120)–(7.122); 2) (7.128).

7.88. Чому дорівнює коваріація між вмістом у точці \bar{x} та вмістом блока, якщо точкові вмісти некорельовані?

7.89. Визначити оптимальну оцінку $\check{Z}(V)$ вмісту блока $Z(V)$ за вмістами y_1, y_2, \dots, y_n у n точках блока, якщо вони некорельовані. Який середній квадрат відхилення $\check{Z}(V)$ від $Z(V)$, якщо дисперсія $Z(V)$ дорівнює σ_V^2 , а дисперсія точкових спостережень σ^2 ?

Відповідь: $\check{Z}(V) = \bar{y}$, $\mathbf{M}(\check{Z}(V) - Z(V))^2 = \sigma_V^2 + \frac{\sigma^2}{n}$.

7.90. Варіограма ізотропного поля має вигляд $\gamma(h) = c_0 + c(1 - \exp(-h/b))$ (експоненціальна модель).

1) За яких значень параметра c_0 виявляється ефект самородків?

2) Яка кореляційна функція поля, якщо його дисперсія відома й дорівнює $0,5(c_0 + c)$?

3) Виразити дисперсію випадкового поля через c_0 і c .

Відповідь: 1) $c_0 > 0$; 2) $r(h) = c \exp(-h/b)$; 3) $c_0 + c$.

7.91. Варіограма описується сферичною моделлю (7.132), $c = 10$, $c_0 = 6$. Чому дорівнює дисперсія поля?

Відповідь: $r(0) = 8$.

7.92. Оцінка запасів обчислюється у вигляді $T = W \sum_{i=1}^n \check{Z}(V_i)$, де $\check{Z}(V_i)$ – оцінка вмісту i -го блока; W – об'єм одного блока. Довести, що дисперсія цієї оцінки $\mathbf{D}(\check{T}) = W^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{cov}(\check{Z}(V_i), \check{Z}(V_j))$. Який вигляд буде мати ця формула, якщо $\mathbf{D}\check{Z}(V_i) = S^2$, а вмісти блоків некорельовані?

Відповідь: $\mathbf{D}(\check{T}) = W^2 S^2 n$.

Додаток

Таблиця 1. Функція (0,1)-нормального розподілу¹ $\Phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$

Z	0,000	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,070	0,080	0,090
-0,0	0,500	0,496	0,492	0,488	0,484	0,480	0,476	0,472	0,468	0,464
-0,1	0,460	0,456	0,452	0,448	0,444	0,440	0,436	0,433	0,429	0,425
-0,2	0,421	0,417	0,413	0,409	0,405	0,401	0,397	0,394	0,390	0,386
-0,3	0,382	0,378	0,374	0,371	0,367	0,363	0,359	0,356	0,352	0,348
-0,4	0,345	0,341	0,337	0,334	0,330	0,326	0,323	0,319	0,316	0,312
-0,5	0,309	0,305	0,302	0,298	0,295	0,291	0,288	0,284	0,281	0,278
-0,6	0,274	0,271	0,268	0,264	0,261	0,258	0,255	0,251	0,248	0,245
-0,7	0,242	0,239	0,236	0,233	0,230	0,227	0,224	0,221	0,218	0,215
-0,8	0,212	0,209	0,206	0,203	0,200	0,198	0,195	0,192	0,189	0,187
-0,9	0,184	0,181	0,179	0,176	0,174	0,171	0,169	0,166	0,164	0,161
-1,0	0,159	0,156	0,154	0,152	0,149	0,147	0,145	0,142	0,140	0,138
-1,1	0,136	0,134	0,131	0,129	0,127	0,125	0,123	0,121	0,119	0,117
-1,2	0,115	0,113	0,111	0,109	0,107	0,106	0,104	0,102	0,100	0,099
-1,3	0,097	0,095	0,093	0,092	0,090	0,089	0,087	0,085	0,084	0,082
-1,4	0,081	0,079	0,078	0,076	0,075	0,074	0,072	0,071	0,069	0,068
-1,5	0,067	0,066	0,064	0,063	0,062	0,061	0,059	0,058	0,057	0,056
-1,6	0,055	0,054	0,053	0,052	0,051	0,050	0,048	0,047	0,046	0,046
-1,7	0,045	0,044	0,043	0,042	0,041	0,040	0,039	0,038	0,038	0,037
-1,8	0,036	0,035	0,034	0,034	0,033	0,032	0,031	0,031	0,030	0,029
-1,9	0,029	0,028	0,027	0,027	0,026	0,026	0,025	0,024	0,024	0,023
-2,0	0,023	0,022	0,022	0,021	0,021	0,020	0,020	0,019	0,019	0,018
-2,1	0,018	0,017	0,017	0,017	0,016	0,016	0,015	0,015	0,015	0,014
-2,2	0,014	0,014	0,013	0,013	0,013	0,012	0,012	0,012	0,011	0,011

¹ Квантиль U_q порядку q визначається як значення Z , для якого $\Phi(Z) = q$.

Закінчення табл. 1.

Z	0,000	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,070	0,080	0,090
-2,3	0,011	0,010	0,010	0,010	0,010	0,009	0,009	0,009	0,009	0,008
-2,4	0,008	0,008	0,008	0,008	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,006
-2,5	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005
-2,6	0,005	0,005	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004
-2,7	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003
-2,8	0,003	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
-2,9	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001
-3,0	0,00135	0,00097	0,00069	0,00048	0,00034	0,00029	0,00016	0,00011	0,00007	0,00005
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,849	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,912	0,913	0,915	0,916	0,918
1,4	0,919	0,921	0,922	0,924	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932
1,5	0,933	0,934	0,936	0,937	0,938	0,939	0,941	0,942	0,943	0,944
1,6	0,945	0,946	0,947	0,948	0,949	0,951	0,952	0,953	0,954	0,954
1,7	0,955	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,962	0,963
1,8	0,964	0,965	0,966	0,966	0,967	0,968	0,969	0,969	0,970	0,971
1,9	0,971	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977
2,0	0,977	0,978	0,978	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982
2,1	0,982	0,983	0,983	0,983	0,984	0,984	0,985	0,985	0,985	0,986
2,2	0,986	0,986	0,987	0,987	0,987	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989
2,3	0,989	0,990	0,990	0,990	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992
2,4	0,992	0,992	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994
2,5	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,995	0,996
2,6	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,997
2,7	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
2,8	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
2,9	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999
3,0	0,99865	0,99903	0,99952	0,99952	0,99966	0,99977	0,99984	0,99989	0,99993	0,99995

Таблиця 2. Квантилі $\chi^2_q(n)$ розподілу¹ χ^2

n	q	0,01	0,025	0,005	0,10	0,90	0,95	0,975	0,99
1		0,00	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,64
2		0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21
3		0,12	0,22	0,35	0,58	6,25	7,82	9,35	11,35
4		0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28
5		0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09
6		0,87	1,24	1,64	2,20	10,65	12,59	14,45	16,81
7		1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48
8		1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,54	20,09
9		2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67
10		2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21
11		3,05	3,82	4,58	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73
12		3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22
13		4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69
14		4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,69	26,12	29,14
15		5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58
16		5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00
17		6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41
18		7,02	8,23	9,39	10,87	25,99	28,87	31,53	34,81
19		7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19
20		8,26	9,55	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57
21		8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93
22		9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29
23		10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64
24		10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98
25		11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31
26		12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64
27		12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96
28		13,57	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28
29		14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59
30		14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89
31		15,66	17,54	19,28	21,43	41,42	44,99	48,23	52,19
32		16,36	18,29	20,07	22,27	42,59	46,19	49,48	53,49
33		17,07	19,05	20,87	23,11	43,75	47,40	50,73	54,78
34		17,79	19,81	21,66	23,95	44,90	48,60	51,97	56,06
35		18,51	20,57	22,47	24,80	46,06	49,80	53,20	57,34
36		19,23	21,34	23,27	25,64	47,21	51,00	54,44	58,62
37		19,96	22,11	24,08	26,49	48,36	52,19	55,67	59,89
38		20,69	22,88	24,88	27,34	49,51	53,38	56,90	61,16
39		21,43	23,65	25,70	28,20	50,66	54,57	58,12	62,43

¹ q – порядок квантиля; n – кількість степенів вільності.

Математична статистика та обробка геологічних даних

Продовження табл. 2

n	q	0,01	0,025	0,005	0,10	0,90	0,95	0,975	0,99
40		22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69
41		22,91	25,22	27,33	29,91	52,95	56,94	60,56	64,95
42		23,65	26,00	28,14	30,77	54,09	58,12	61,78	66,21
43		24,40	26,79	28,97	31,63	55,23	59,30	62,99	67,41
44		25,15	27,58	29,79	32,49	56,37	60,48	64,30	68,71
45		25,90	28,37	30,61	33,35	57,51	61,66	65,41	69,96
46		26,66	29,16	31,44	34,22	58,64	62,83	66,62	71,20
47		27,42	29,96	32,27	35,08	59,77	64,00	67,82	72,44
48		28,18	30,76	33,10	35,95	60,91	65,17	69,02	73,68
49		28,94	31,56	33,93	36,82	62,04	66,34	70,22	74,92
50		29,71	32,36	34,76	37,69	63,17	67,51	71,42	76,15
51		30,48	33,16	35,60	38,56	64,30	68,67	72,62	77,39
52		31,25	33,97	36,44	39,43	65,42	69,83	73,81	78,62
53		32,02	34,78	37,28	40,31	66,55	70,99	75,00	79,84
54		32,79	35,59	38,12	41,18	67,67	72,15	76,19	81,07
55		33,57	36,40	38,96	42,06	68,80	73,31	77,38	82,29
56		34,35	37,21	39,80	42,94	69,92	74,47	78,57	83,51
57		35,13	38,03	40,65	43,82	71,04	75,62	79,75	84,73
58		35,91	38,84	41,19	44,70	72,16	76,78	80,94	85,95
59		36,70	39,66	42,34	45,58	73,28	77,93	82,12	87,17
60		37,49	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38
61		38,27	41,30	44,04	47,34	75,51	80,23	84,48	89,59
62		39,06	42,13	44,89	48,23	76,63	81,38	85,65	90,80
63		39,86	42,95	45,74	49,11	77,75	82,53	86,83	92,01
64		40,65	43,78	46,60	50,00	78,86	83,68	88,00	93,22
65		41,44	44,60	47,45	50,88	79,97	84,82	89,18	94,42
66		42,24	45,43	48,31	51,77	81,09	85,97	90,35	95,63
67		43,04	46,26	49,16	52,66	82,20	87,11	91,52	96,83
68		43,84	47,09	50,02	53,55	83,31	88,25	92,69	98,03
69		44,64	47,92	50,88	54,44	84,42	89,39	93,86	99,23
70		45,44	48,76	51,74	55,33	85,53	90,53	95,02	100,43
71		46,26	49,59	52,60	56,22	86,64	91,67	96,19	101,62
72		47,05	50,43	53,46	57,11	87,74	92,81	97,35	102,82
73		47,86	51,27	54,33	58,01	88,85	93,95	98,52	104,01
74		48,67	52,10	55,19	58,90	89,96	95,08	99,68	105,20
75		49,48	52,94	56,05	59,80	91,06	96,22	100,84	106,39
76		50,29	53,78	56,92	60,69	92,17	97,35	102,00	107,58
77		51,10	54,62	57,79	61,59	93,27	98,48	103,16	108,77
78		51,91	55,47	58,65	62,48	94,37	99,62	104,32	109,96
79		52,73	56,31	59,52	63,38	95,48	100,75	105,75	111,14
80		53,54	57,15	60,39	64,28	96,58	101,88	106,63	112,33

Закінчення табл. 2

q	0,01	0,025	0,005	0,10	0,90	0,95	0,975	0,99
81	54,36	58,00	61,26	65,18	97,68	103,01	107,78	113,51
82	55,17	58,85	62,13	66,08	98,78	104,14	108,94	114,70
83	55,99	59,69	63,00	66,98	99,88	105,27	110,09	115,88
84	56,81	60,54	63,88	67,88	100,98	106,40	111,24	117,06
85	57,63	61,39	64,75	68,78	102,08	107,52	112,39	118,24
86	58,46	62,24	65,62	69,68	103,18	108,65	113,54	119,41
87	59,28	63,09	66,50	70,58	104,28	109,77	114,69	120,59
88	60,10	63,94	67,37	71,48	105,37	110,90	115,84	121,77
89	60,93	64,79	68,25	72,39	106,47	112,02	116,99	122,94
90	61,75	65,65	69,13	73,29	107,57	113,15	118,14	124,12
91	62,58	66,50	70,00	74,20	108,66	114,27	119,28	125,29
92	63,41	67,36	70,88	75,10	109,76	115,39	120,43	126,46
93	64,24	68,21	71,76	76,01	110,85	116,51	121,57	127,63
94	65,07	69,07	72,64	76,91	111,94	117,63	122,72	128,80
95	65,90	69,93	73,52	77,82	113,04	118,75	123,86	129,97
96	66,73	70,78	74,40	78,73	114,13	119,87	125,00	131,14
97	67,56	71,64	75,28	79,63	115,22	120,99	126,14	132,31
98	68,40	72,50	76,16	80,54	116,32	122,11	127,28	133,48
99	69,23	73,36	77,05	81,45	117,41	123,23	128,42	134,64
100	70,07	74,22	77,93	82,36	118,50	124,34	129,56	135,81

Таблиця 3. Квантилі $t_q(n)$ розподілу Стьюдента¹

q	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	3,078	6,314	12,706	31,82	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,500
8	1,397	1,860	2,306	2,897	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,813	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,625	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,603	2,947

¹ q – порядок квантиля, n – кількість степенів вільності.

n	q	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
16		1,337	1,746	2,120	2,584	2,921
17		1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18		1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19		1,328	1,729	2,093	2,540	2,861
20		1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21		1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22		1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23		1,320	1,714	2,069	2,500	2,807
24		1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25		1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26		1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27		1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28		1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29		1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30		1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
32		1,309	1,694	2,037	2,449	2,739
34		1,307	1,691	2,032	2,441	2,728
36		1,306	1,688	2,028	2,435	2,720
38		1,304	1,686	2,024	2,429	2,712
40		1,303	1,684	2,021	2,423	2,705
42		1,302	1,682	2,018	2,419	2,698
44		1,301	1,680	2,015	2,414	2,692
46		1,300	1,679	2,013	2,410	2,687
48		1,299	1,677	2,011	2,407	2,682
50		1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
55		1,297	1,673	2,004	2,396	2,668
60		1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
65		1,295	1,669	1,997	2,385	2,654
70		1,294	1,667	1,994	2,381	2,648
80		1,292	1,664	1,990	2,374	2,639
90		1,291	1,662	1,987	2,369	2,632
100		1,290	1,660	1,984	2,364	2,626
120		1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
150		1,287	1,655	1,976	2,352	2,609
200		1,296	1,653	1,972	2,345	2,601
250		1,285	1,651	1,970	2,341	2,596
300		1,284	1,650	1,968	2,339	2,592
400		1,284	1,649	1,966	2,336	2,588
500		1,283	1,648	1,965	2,334	2,586

Таблиця 4. 95 %-ві квантилі $F_{0,95}(v_1, v_2)$ розподілу Фішера з v_1 та v_2 степенями вільності

v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161,4	199,5	215,7	224,5	230,1	238,9	236,7	238,8	240,5	241,8
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,39	19,4
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,7
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,9
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,7
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,0
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,6
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,3
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,1
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,9
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,8
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,7
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,6
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,6
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,6
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,5
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,4
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,4
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,4
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,3
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,3
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,37	2,32	2,3
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,3
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,2
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,2
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,2
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,2
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,2
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,1
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,1
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,1
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,0
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,9
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,9
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,8

Закінчення табл. 4

v_1	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	243,9	245,9	248,0	249,0	250,0	251,1	252,2	253,2	254,3
2	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,5
3	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,37
6	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

Таблиця 5. 97,5 %-ві квантилі $F_{0,975}(v_1, v_2)$ розподілу Фішера з v_1 та v_2 степенями вільності

$v_2 \backslash v_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	647,79	799,50	864,16	899,58	921,85	937,11	948,22	956,66	963,28
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,89	14,74	14,62	14,54	14,47
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,42	3,29	3,20	3,12
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84
21	5,83	4,42	3,82	3,48	3,25	3,09	2,97	2,87	2,80
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76
23	5,75	4,35	3,75	3,41	3,18	3,02	2,90	2,81	2,73
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65
27	5,63	4,24	3,65	3,31	3,08	2,92	2,80	2,71	2,63
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61
29	5,59	4,20	3,61	3,27	3,04	2,88	2,76	2,67	2,59
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33
120	5,15	3,80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,39	2,30	2,22
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11

Закінчення табл. 5

v_1	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
v_2										
1	968,6	967,7	984,9	993,1	997,2	1001	1005	1010	1014	1018
2	39,40	39,42	39,43	39,45	39,46	39,47	39,47	39,48	39,49	39,50
3	14,42	14,34	14,25	14,17	14,12	14,08	14,04	13,99	13,95	13,90
4	8,84	8,75	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,31	8,26
5	6,62	6,52	6,42	6,33	6,28	6,23	6,18	6,12	6,07	6,02
6	5,46	5,37	5,27	5,17	5,12	5,07	5,01	4,96	4,90	4,85
7	4,76	4,67	4,57	4,47	4,42	4,36	4,31	4,25	4,20	4,14
8	4,30	4,20	4,10	4,00	3,95	3,89	3,84	3,78	3,73	3,67
9	3,96	3,87	3,77	3,67	3,61	3,56	3,51	3,45	3,39	3,33
10	3,72	3,62	3,52	3,42	3,37	3,31	3,26	3,20	3,14	3,08
11	3,53	3,43	3,33	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2,94	2,88
12	3,37	3,28	3,18	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,79	2,72
13	3,25	3,15	3,05	2,95	2,89	2,84	2,78	2,72	2,66	2,60
14	3,15	3,05	2,95	2,84	2,79	2,73	2,67	2,61	2,55	2,49
15	3,06	2,96	2,86	2,76	2,70	2,64	2,59	2,52	2,46	2,40
16	2,99	2,89	2,79	2,68	2,63	2,57	2,51	2,45	2,38	2,32
17	2,92	2,82	2,72	2,62	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,25
18	2,87	2,77	2,67	2,55	2,50	2,44	2,38	2,32	2,26	2,19
19	2,82	2,72	2,62	2,51	2,45	2,39	2,33	2,27	2,20	2,13
20	2,77	2,68	2,57	2,46	2,41	2,35	2,29	2,22	2,16	2,09
21	2,73	2,64	2,53	2,42	2,37	2,31	2,25	2,18	2,11	2,04
22	2,70	2,60	2,50	2,39	2,33	2,27	2,21	2,14	2,08	2,00
23	2,67	2,57	2,47	2,36	2,30	2,24	2,18	2,11	2,04	1,97
24	2,64	2,54	2,44	2,33	2,27	2,21	2,15	2,08	2,01	1,94
25	2,61	2,51	2,41	2,30	2,24	2,18	2,12	2,05	1,98	1,91
26	2,59	2,49	2,39	2,28	2,22	2,16	2,09	2,03	1,95	1,88
27	2,57	2,47	2,36	2,25	2,20	2,13	2,07	2,00	1,93	1,85
28	2,55	2,45	3,34	2,23	2,17	2,11	2,05	1,98	1,91	1,83
29	2,53	2,43	2,32	2,21	2,15	2,09	2,03	1,96	1,89	1,8
30	2,51	2,41	2,31	2,20	2,14	2,07	2,01	1,94	1,87	1,79
40	2,39	2,29	2,18	2,07	2,01	1,94	1,88	1,80	1,72	1,64
60	2,27	2,17	2,06	1,94	1,88	1,82	1,74	1,67	1,58	1,48
120	2,16	2,05	1,95	1,82	1,76	1,69	1,61	1,53	1,43	1,3
∞	2,05	1,94	1,83	1,71	1,64	1,57	1,48	1,39	1,27	1,00

Таблиця 6. Розподіл Пуассона. Імовірності $P\{\xi = i\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$

i	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0,905	0,819	0,741	0,670	0,607	0,549	0,497	0,449	0,407	0,368
1	0,090	0,164	0,222	0,268	0,303	0,329	0,348	0,359	0,366	0,368
2	0,005	0,016	0,033	0,054	0,076	0,099	0,122	0,144	0,165	0,184
3	0,000	0,001	0,003	0,007	0,013	0,020	0,028	0,038	0,049	0,061
4	-	0,000	0,000	0,001	0,002	0,003	0,005	0,008	0,011	0,015
5	-	-	-	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,002	0,003
6	-	-	-	-	-	-	0,000	0,000	0,000	0,001
i	λ									
	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0	0,333	0,301	0,273	0,274	0,223	0,202	0,183	0,165	0,150	0,135
1	0,366	0,361	0,354	0,345	0,335	0,323	0,311	0,298	0,284	0,271
2	0,201	0,217	0,230	0,242	0,251	0,258	0,264	0,268	0,270	0,271
3	0,074	0,087	0,100	0,113	0,126	0,138	0,150	0,161	0,171	0,180
4	0,020	0,026	0,032	0,039	0,047	0,055	0,064	0,073	0,081	0,090
5	0,004	0,006	0,008	0,011	0,014	0,018	0,022	0,026	0,031	0,036
6	0,001	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,008	0,010	0,012
7	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,003	0,003
8	-	-	-	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001
i	λ									
	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
0	0,122	0,111	0,100	0,091	0,082	0,074	0,067	0,061	0,055	0,050
1	0,257	0,244	0,231	0,218	0,205	0,193	0,181	0,170	0,160	0,149
2	0,270	0,268	0,265	0,261	0,257	0,251	0,245	0,238	0,231	0,224
3	0,189	0,197	0,203	0,209	0,214	0,218	0,220	0,222	0,224	0,224
4	0,099	0,108	0,117	0,125	0,134	0,141	0,149	0,156	0,162	0,168
5	0,042	0,048	0,054	0,060	0,067	0,074	0,080	0,087	0,094	0,101
6	0,015	0,017	0,021	0,024	0,028	0,032	0,036	0,041	0,045	0,050
7	0,004	0,005	0,007	0,008	0,010	0,012	0,014	0,016	0,019	0,022
8	0,001	0,002	0,002	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008
9	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,003
10	-	-	-	-	-	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001
i	λ									
	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
0	0,045	0,041	0,037	0,033	0,030	0,027	0,025	0,022	0,020	0,018
1	0,140	0,130	0,122	0,113	0,106	0,098	0,091	0,085	0,079	0,073
2	0,216	0,209	0,201	0,193	0,185	0,177	0,169	0,162	0,154	0,147
3	0,224	0,223	0,221	0,219	0,216	0,212	0,209	0,205	0,200	0,195
4	0,173	0,178	0,182	0,186	0,189	0,191	0,193	0,194	0,195	0,195
5	0,107	0,114	0,120	0,126	0,132	0,138	0,143	0,148	0,152	0,156
6	0,056	0,061	0,066	0,072	0,077	0,083	0,088	0,094	0,099	0,104
7	0,025	0,028	0,031	0,035	0,039	0,042	0,047	0,051	0,055	0,060

Математична статистика та обробка геологічних даних

Закінчення табл. 6

8	0,010	0,011	0,013	0,015	0,017	0,019	0,022	0,024	0,027	0,030
9	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010	0,012	0,013
10	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,004	0,005	0,005
11	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002
12	-	-	-	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001
<i>i</i>	λ									
	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
0	0,017	0,015	0,014	0,012	0,011	0,010	0,009	0,008	0,007	0,007
1	0,068	0,063	0,058	0,054	0,050	0,046	0,043	0,040	0,036	0,034
2	0,139	0,132	0,125	0,119	0,112	0,106	0,100	0,095	0,089	0,084
3	0,190	0,185	0,180	0,174	0,169	0,163	0,157	0,152	0,146	0,140
4	0,195	0,194	0,193	0,192	0,190	0,188	0,185	0,182	0,179	0,175
5	0,160	0,163	0,166	0,169	0,171	0,173	0,174	0,175	0,175	0,175
6	0,109	0,114	0,119	0,124	0,128	0,132	0,136	0,140	0,143	0,146
7	0,064	0,069	0,073	0,078	0,082	0,087	0,091	0,096	0,100	0,104
8	0,033	0,036	0,039	0,043	0,046	0,050	0,054	0,058	0,061	0,065
9	0,015	0,017	0,019	0,021	0,023	0,026	0,028	0,031	0,033	0,036
10	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010	0,012	0,013	0,015	0,016	0,018
11	0,002	0,003	0,003	0,004	0,004	0,005	0,006	0,006	0,007	0,008
12	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003
13	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
14	-	-	-	-	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
<i>i</i>	λ									
	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0
0	0,004	0,002	0,002	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	-
1	0,022	0,015	0,010	0,006	0,004	0,003	0,002	0,001	0,001	0,000
2	0,062	0,043	0,032	0,022	0,016	0,011	0,007	0,005	0,003	0,002
3	0,113	0,089	0,069	0,052	0,039	0,029	0,021	0,015	0,011	0,008
4	0,156	0,134	0,112	0,091	0,073	0,057	0,044	0,034	0,025	0,019
5	0,171	0,161	0,145	0,128	0,109	0,092	0,075	0,061	0,048	0,038
6	0,157	0,161	0,157	0,149	0,137	0,122	0,107	0,091	0,076	0,063
7	0,123	0,138	0,146	0,149	0,146	0,140	0,129	0,117	0,104	0,090
8	0,085	0,103	0,119	0,130	0,137	0,140	0,138	0,132	0,123	0,113
9	0,052	0,069	0,086	0,101	0,114	0,124	0,130	0,132	0,130	0,125
10	0,029	0,041	0,056	0,071	0,086	0,099	0,110	0,119	0,124	0,125
11	0,014	0,023	0,033	0,045	0,059	0,072	0,085	0,097	0,107	0,114
12	0,007	0,011	0,018	0,026	0,037	0,048	0,060	0,073	0,084	0,095
13	0,003	0,005	0,009	0,014	0,021	0,030	0,040	0,050	0,062	0,073
14	0,001	0,002	0,004	0,007	0,011	0,017	0,024	0,032	0,042	0,052
15	0,000	0,001	0,002	0,003	0,006	0,009	0,014	0,019	0,027	0,035
16	-	0,000	0,001	0,001	0,003	0,005	0,007	0,011	0,016	0,022
17	-	-	0,000	0,001	0,001	0,002	0,004	0,006	0,009	0,013
18	-	-	-	0,000	0,000	0,001	0,002	0,003	0,005	0,007
19	-	-	-	-	-	0,000	0,001	0,001	0,002	0,004
20	-	-	-	-	-	-	0,000	0,001	0,001	0,002
21	-	-	-	-	-	-	-	0,000	0,000	0,001

Таблиця 7. Квантилі $\zeta_n(q)$ розподілу найбільшого за абсолютною величиною нормованого відхилення $\zeta_n = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i - \bar{y}| / S$, що обчислюється за вибіркою з нормальної сукупності¹

n	q				n	q			
	0,995	0,99	0,95	0,90		0,995	0,99	0,95	0,90
3	1,41	1,41	1,41	1,41	13	2,89	2,81	2,56	2,43
4	1,73	1,73	1,71	1,69	14	2,95	2,86	2,60	2,46
5	1,98	1,97	1,92	1,87	15	3,00	2,91	2,64	2,49
6	2,18	2,16	2,07	2,00	16	3,04	2,95	2,67	2,52
7	2,34	2,31	2,18	2,09	17	3,08	2,98	2,70	2,55
8	2,48	2,43	2,27	2,17	18	3,12	3,02	2,73	2,58
9	2,59	2,53	2,35	2,24	19	3,16	3,05	2,75	2,60
10	2,68	2,62	2,41	2,29	20	3,19	3,08	2,78	2,62
11	2,76	2,69	2,47	2,34	21	3,22	3,11	2,80	2,64
12	2,83	2,75	2,52	2,39	22	3,25	3,13	2,82	2,66
23	3,27	3,16	2,84	2,68	37	3,52	3,39	3,04	2,87
24	3,30	3,18	2,86	2,70	38	3,53	3,40	3,06	2,89
25	3,32	3,20	2,88	2,72	39	3,55	3,41	3,07	2,89
26	3,34	3,22	2,90	2,73	40	3,56	3,42	3,08	2,90
27	3,36	3,24	2,91	2,75	41	3,57	3,44	3,08	2,91
28	3,38	3,26	2,93	2,76	42	3,58	3,45	3,09	2,92
29	3,40	3,28	2,94	2,78	43	3,59	3,46	3,10	2,93
30	3,42	3,29	2,96	2,79	44	3,60	3,47	3,11	2,94
31	3,43	3,31	2,97	2,81	45	3,61	3,47	3,12	2,95
32	3,45	3,32	2,99	2,82	46	3,62	3,48	3,13	2,96
33	3,47	3,34	3,00	2,83	47	3,63	3,49	3,14	2,96
34	3,48	3,35	3,01	2,84	48	3,64	3,50	3,15	2,97
35	3,49	3,36	3,02	2,85	49	3,65	3,51	3,15	2,98
36	3,51	3,38	3,03	2,86	50	3,66	3,52	3,16	2,99

¹ q – порядок квантиля $\zeta_n(q)$ ($\mathbf{P}\{\zeta_n < \zeta_n(q)\} = q$; n – кількість спостережень у вибірці).

Таблиця 8. Верхні критичні границі для відношень

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{y_n - y_1}, \frac{y_n - y_{n-1}}{y_n - y_2}, \frac{y_n - y_{n-2}}{y_n - y_1}$$

n	α^1				n	α			
	0,005	0,01	0,05	0,10		0,005	0,01	0,05	0,10
3	0,99	0,99	0,94	0,89	4	0,93	0,89	0,77	0,68
	1,00	1,00	1,00	1,00		1,00	0,99	0,96	0,91
	1,00	1,00	1,00	1,00		1,00	0,99	0,97	0,94
5	0,82	0,78	0,64	0,56	11	0,54	0,50	0,39	0,33
	0,94	0,92	0,81	0,73		0,61	0,57	0,45	0,39
	0,95	0,93	0,85	0,78		0,63	0,60	0,50	0,45
6	0,74	0,70	0,56	0,48	12	0,52	0,48	0,38	0,32
	0,84	0,81	0,69	0,61		0,58	0,54	0,43	0,37
	0,87	0,84	0,74	0,67		0,61	0,48	0,48	0,43
7	0,68	0,64	0,51	0,43	15	0,48	0,44	0,34	0,29
	0,78	0,74	0,61	0,53		0,52	0,49	0,38	0,32
	0,81	0,78	0,66	0,60		0,55	0,52	0,43	0,38
8	0,63	0,59	0,47	0,40	20	0,43	0,39	0,30	0,25
	0,73	0,68	0,55	0,48		0,46	0,43	0,33	0,28
	0,75	0,71	0,61	0,55		0,49	0,46	0,37	0,33
9	0,60	0,56	0,44	0,37	24	0,40	0,37	0,28	0,23
	0,68	0,64	0,51	0,44		0,43	0,40	0,31	0,26
	0,70	0,67	0,57	0,51		0,46	0,43	0,35	0,31
10	0,57	0,53	0,41	0,35	30	0,37	0,34	0,26	0,22
	0,64	0,60	0,48	0,41		0,40	0,37	0,28	0,24
	0,66	0,63	0,53	0,47		0,43	0,40	0,32	0,29

¹ α – рівень значущості; n – кількість спостережень;
 y_1, y_n – відповідно мінімальне та максимальне спостереження вибірки;
 y_2, y_{n-1} – мінімальне та максимальне спостереження вибірки без y_1 і y_n ;
 y_{n-2} – максимальне спостереження вибірки без y_n і y_{n-1} .

Таблиця 9. Критерій Кочрена. Верхні 5 %-ві критичні границі $g(\alpha, I, J - 1)$

для статистики $G = \frac{S_{\max}^2}{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_I^2}$, побудованої за I незалежними оцінками

дисперсії, кожен з яких обчислено за J спостереженнями ($\alpha = 0,05$)

$J-1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	114	∞
2	0,999	0,975	0,939	0,906	0,877	0,853	0,833	0,816	0,801	0,788	0,734	0,660	0,581	0,500
3	0,967	0,871	0,798	0,746	0,707	0,677	0,653	0,633	0,617	0,603	0,547	0,475	0,403	0,333
4	0,907	0,768	0,684	0,629	0,590	0,560	0,537	0,518	0,502	0,488	0,437	0,372	0,309	0,250
5	0,841	0,684	0,598	0,544	0,506	0,478	0,456	0,439	0,424	0,412	0,365	0,307	0,251	0,200
6	0,781	0,616	0,532	0,480	0,445	0,418	0,398	0,382	0,368	0,357	0,314	0,261	0,212	0,167
7	0,727	0,561	0,480	0,431	0,397	0,373	0,354	0,338	0,326	0,315	0,276	0,228	0,183	0,143
8	0,680	0,516	0,438	0,391	0,360	0,336	0,319	0,304	0,293	0,283	0,246	0,202	0,216	0,125
9	0,639	0,478	0,403	0,358	0,329	0,307	0,290	0,277	0,266	0,257	0,223	0,182	0,145	0,111
10	0,602	0,445	0,373	0,331	0,303	0,282	0,267	0,254	0,244	0,235	0,103	0,166	0,131	0,100
12	0,541	0,392	0,326	0,288	0,262	0,244	0,230	0,219	0,210	0,202	0,174	0,140	0,110	0,083
15	0,471	0,335	0,276	0,242	0,220	0,203	0,191	0,182	0,174	0,167	0,143	0,114	0,089	0,067
20	0,389	0,271	0,221	0,192	0,174	0,160	0,150	0,142	0,136	0,130	0,111	0,088	0,068	0,050
24	0,343	0,235	0,191	0,166	0,149	0,137	0,129	0,122	0,116	0,111	0,094	0,074	0,057	0,042
30	0,293	0,198	0,159	0,138	0,124	0,114	0,106	0,100	0,096	0,092	0,077	0,060	0,046	0,033
40	0,237	0,158	0,126	0,108	0,097	0,089	0,083	0,078	0,075	0,071	0,060	0,046	0,035	0,025
60	0,174	0,113	0,090	0,077	0,068	0,062	0,058	0,055	0,052	0,050	0,041	0,032	0,023	0,017
120	0,100	0,063	0,050	0,042	0,037	0,034	0,031	0,029	0,028	0,027	0,022	0,017	0,012	0,008

Таблиця 10. Значення математичного сподівання d_n розмаху (0,1)-нормального розподілу для розрахунку оцінки середнього квадратичного відхилення за розмахом

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
d_n	1,13	1,69	2,06	2,33	2,53	2,70	2,85	2,97	3,08	
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d_n	3,37	3,26	3,34	3,41	3,47	3,53	3,59	3,64	3,69	3,73

Таблиця 11. Квантилі $d_n(q)$ розмаху (0;1)-нормального розподілу

n	q				n	q			
	0,025	0,05	0,95	0,975		0,025	0,05	0,95	0,975
2	0,04	0,09	2,77	3,17	12	1,88	2,07	4,62	4,92
3	0,30	0,43	3,31	3,68	13	1,97	2,16	4,68	4,99
4	0,59	0,76	3,63	3,98	14	2,06	2,24	4,74	5,04
5	0,85	1,03	3,86	4,20	15	2,14	2,32	4,80	5,09
6	1,06	1,25	4,03	4,36	16	2,21	2,39	4,85	5,14
7	1,25	1,44	4,17	4,49	17	2,27	2,45	4,89	5,18
8	1,41	1,60	4,29	4,61	18	2,34	2,51	4,93	5,22
9	1,55	1,74	4,39	4,70	19	2,39	2,57	4,97	5,26
10	1,67	1,86	4,47	4,79	20	2,45	2,62	5,01	5,30
11	1,78	1,97	4,55	4,86					

Алфавітний покажчик

Аббе критерій	340
абсолютна похибка оцінки	187
автокореляційна функція	413
автокореляція	340
адитивна модель результату виміру	53
альтернативна гіпотеза	329
амплітуда гармоніки	451
амплітуда сигналу	423
апостеріорні ймовірності	29
апріорні ймовірності	29
асиметрія випадкової величини	52
асимптотична нормальність оцінки	187
асимптотично ефективна оцінка	188
асимптотично нормальна оцінка	187
багатовимірна випадкова величина	139
багатовимірних розподілів числові характеристики	141
багатовимірного розподілу функція	140
багатовимірного розподілу щільність	140
багатовимірної випадкової величини коваріаційна матриця	141
багатовимірної випадкової величини кореляційна матриця	141
багатовимірної випадкової величини математичне сподівання	141
Бартлетта критерій	384
Бейеса формула	29
Бернуллі схема	80
Бернуллі схема узагальнена	80
білий шум	453
біноміальний розподіл	80
вагова функція	417
вагові коефіцієнти	417
варіації коефіцієнт	52
варіограма	457
взаємна кореляційна функція	414
вибіркова функція розподілу	236

вибіркова щільність розподілу	235
вимір непрямий (у випадку множинної кореляції)	174
вимір непрямий (у випадку парної кореляції)	151
вимір опосередкований (у випадку множинної кореляції)	174
вимір опосередкований (у випадку парної кореляції)	151
випадкова величина	47
випадкова величина багатовимірна	139
випадкова функція	413
випадкове поле	413
випадковий процес	413
відгук фільтра	416
відносна похибка оцінки	187
відносна частота	235
відношення сигнал/завада	422
відсутність післядії потоку подій	91
Вінера – Колмогорова фільтр	444
властивості ймовірності	28
властивості оцінок	186
гауссівська випадкова функція	414
геометрична ймовірність	13
геометричний розподіл	80
гіпергеометричний розподіл	77
гістограма	235
групування	406
густина мережі	16
двосторонні границі для значень випадкової величини	51
де Війса модель	458
дендрограма	406
дискретна випадкова величина	47
дисперсія випадкової величини	51
довірча ймовірність	186
довірчий інтервал	186
довірчі границі для коефіцієнта регресії (МНК)	276
достовірна подія	5
експоненціальна модель	458
ексцес випадкової величини	52
ексцесу коефіцієнт	52
елемент ймовірності	48
ергодична випадкова функція	414
еталонні спостереження (у задачі класифікації)	391
ефективна оцінка	187
ефективність оцінки	187
задача фільтрації	416
закон Пуассона	90
збіжність за ймовірністю	186
згортка	453
зсув оцінки	186
ймовірність	5
ймовірність виявлення об'єкта пошуку	14

імовірність довірча	186
інтенсивність потоку подій	91
інтервал автокореляції	413
інтервал довірчий	186
квантиль	51
кількість комбінацій	6
кількість розміщень	6
класичне визначення ймовірності	6
кластер-аналіз	406
коваріаційна матриця багатовимірної випадкової величини	141
коефіцієнт асиметрії випадкової величини	52
коефіцієнт варіації випадкової величини	52
коефіцієнт ексцесу випадкової величини	52
коефіцієнт кореляції	149
коефіцієнт кореляції (парний)	149
коефіцієнт кореляції частковий	175
коефіцієнт регресії (у випадку множинної кореляції)	171
коефіцієнт регресії (у парному кореляційному аналізі)	150
"коефіцієнт удачі"	81
конкуруючі гіпотези	329
кореляційна матриця багатовимірної випадкової величини	141
кореляційна функція	413
кореляційне відношення (МНК)	275
кореляційний аналіз (парний)	148
кореляційний аналіз множинний	171
кореляція	148
кореляція множинна	171
кореляція парна	148
корисний сигнал	415
Котельникова критерій	428
Кочрена критерій	384
Крейга формула	457
критерій Аббе	359
критерій Бартлетта	384
критерій згоди	357
критерій згоди Пірсона	359
критерій Котельникова	428
критерій Кочрена	384
критерій Неймана – Пірсона	392
критерій однорідності	371
критерій порівняння розподілів	336
критерій сполучності ознак	339
критерій спроможності оцінки	186
критерій Стюдента	332
критерій Фішера	335
крок за профілем	15
лінійний фільтр	416
логарифмічно нормальний розподіл	125
логнормальний розподіл	125

максимально правдоподібна оцінка	191
максимуму правдоподібності метод знаходження оцінок	190
математичне сподівання багатовимірної випадкової величини	141
математичне сподівання випадкової величини	50
медіана випадкової величини	51
метод логарифмування для розрахунку відносної похибки	250
метод максимуму правдоподібності знаходження оцінок	190
метод моментів знаходження оцінок	190
метод найменших квадратів (МНК)	269
метод середніх значень знаходження оцінок	188
методи знаходження оцінок	188
множина значень випадкової величини	47
множинна кореляція	171
множинний коефіцієнт кореляції	171
множинний кореляційний аналіз	171
мода випадкової величини	51
модальне значення випадкової величини	51
модель адитивна результату виміру	53
модель де Війса	458
момент початковий	53
момент центральний	53
моментів метод знаходження оцінок	190
Муавра – Лапласа формула	106
найімовірніше значення випадкової величини	51
незалежність випадкових величин	49
незалежність подій	29
незсунена оцінка	186
незсуненість оцінки	186
Неймана – Пірсона критерій	392
некорельована випадкова функція	415
неможлива подія	5
непараметрична оцінка медіани	236
непараметрична оцінка моди	236
непараметричний метод оцінки	235
неперервна випадкова величина	47
непрямий вимір (у випадку множинної кореляції)	174
непрямий вимір (у випадку парної кореляції)	151
нерівноточні спостереження	190
нерівноточні спостереження (МНК)	270
несумісні події	28
нормальна система рівнянь МНК	272
нормальний розподіл випадкової величини	102
нормальність асимптотичної оцінки	187
нормована кореляційна функція	414
об'єднання подій	28
область значень випадкової величини	47
однорідне випадкове поле	456
оператор фільтра	416
операції над подіями	28

опосередкований вимір (у випадку множинної кореляції)	174
опосередкований вимір (у випадку парної кореляції)	151
ординарність потоку подій	91
основна частота спектра	452
оцінка	185
оцінка асимптотично ефективна	188
оцінка асимптотично нормальна	187
оцінка ефективна	187
оцінка запасів	319
оцінка інтеграла за методом найменших квадратів	318
оцінка інтеграла за уточненою формулою трапецій	317
оцінка інтеграла за формулою прямокутників	316
оцінка інтеграла за формулою Симпсона	318
оцінка інтеграла за формулою трапецій	316
оцінка максимально правдоподібна	191
оцінка незсунена	186
оцінка об'ємів	319
оцінка площі	318
оцінка середньозважена	189
оцінка спроможна	186
оцінка статистична	185
оцінки ефективність	187
оцінки за згрупованими даними	236
оцінки зсув	186
оцінки незсуненість	186
оцінки спроможність	186
оцінок властивості	186
оцінок методи знаходження	188
параметричний метод оцінки функції	234
параметричний метод оцінки щільності розподілу	234
перетин подій	28
Пірсона критерій згоди	359
Пірсона розподіл	121
планування експерименту за МНК	280
повна група подій	29
подій потік	91
поліноміальний розподіл	80
поправка Шеппарда	237
порядок квантиля	51
потік подій	91
потоку подій інтенсивність	91
потоку подій ординарність	91
потоку подій стаціонарність	91
похибка оцінки абсолютна	187
похибка оцінки відносна	187
похибка розрахункового параметра	249
початковий момент випадкової величини	53
правдоподібності функція	191
протилежна подія	28

профіль точкових спостережень	15
Пуассона закон	90
пуассонівський потік подій	91
радіус автокореляції	413
регресії коефіцієнти (у випадку множинної кореляції)	171
регресії коефіцієнти (у випадку парної кореляції)	148
регресії функція (у парному кореляційному аналізі)	148
рівень значущості	329
рівномірний розподіл випадкової величини	99
рівноточні спостереження	270
рівняння множинного лінійного статистичного зв'язку	171
рівняння парного лінійного статистичного зв'язку	150
різниця подій	28
розділення неоднорідної сукупності	406
розміщення	6
розподіл	121
розподіл біноміальний	80
розподіл випадкової величини	48
розподіл геометричний	80
розподіл гіпергеометричний	77
розподіл логарифмічно нормальний	125
розподіл логнормальний	125
розподіл нормальний випадкової величини	102
розподіл Пірсона	121
розподіл поліноміальний	80
розподіл рівномірний випадкової величини	99
розподіл Стюдента	121
розподіл Фішера	122
розрахунковий параметр	249
серединне значення випадкової величини	51
середнє значення випадкової величини	50
середнє квадратичне відхилення (с.к.в.) випадкової величини	52
середній ризик	428
середніх значень метод знаходження оцінок	188
середньозважена оцінка	189
симетричності границь умова	51
Симпсона формула	318
спектр випадкової функції	452
спектральна щільність	452
спостереження випадкової величини	47
спроможна оцінка	186
спроможність оцінки	186
спроможності критерій	186
статистична оцінка	185
статистичне визначення ймовірності	5
стаціонарність потоку подій	91
Стерджесса формула	235
Стюдента критерій	332
Стюдента розподіл	121

сферична модель	458
схема Бернуллі	80
схема Бернуллі узагальнена	80
таблиця оцінок числових характеристик розподілів	210
теорема центральна гранична	103
точність оцінки	186
транспонування вектора	139
транспонування матриці	273
тренд	340
узагальнена схема Бернуллі	80
умова ортогональності (у задачі фільтрації)	444
факторний аналіз	409
фільтр	416
фільтр Вінера – Колмогорова	444
фільтрації задача	416
Фішера критерій	335
Фішера розподіл	122
формула Бейеса	29
формула додавання ймовірностей	28
формула ймовірностей гіпотез	29
формула Крейга	457
формула Муавра – Лапласа	106
формула повної ймовірності	29
формула Стерджесса	235
функція багатовимірного розподілу	140
функція накопичених частот	236
функція правдоподібності	191
функція регресії	269
функція регресії (у парному кореляційному аналізі)	148
функція розподілу випадкової величини	48
характеристики участі компонент у множинному зв'язку	174
центральна гранична теорема	103
центральний момент випадкової величини	53
цілком стаціонарна випадкова функція	414
частковий коефіцієнт кореляції	175
частота події	5
частотна характеристика функції	453
чисельне інтегрування	318
числові характеристики багатовимірних розподілів	141
числові характеристики випадкових величин	50
Шеппарда поправка	237
щільність багатовимірного розподілу	140
щільність розподілу випадкової величини	48
<i>F</i> -розподіл	122
<i>t</i> -розподіл	121
<i>U</i> -критерій	331

Список літератури

1. *Айвазян С.А., Бежаева З.И., Староверов О.В.* Классификация многомерных наблюдений. – М.: Статистика, 1973.
2. *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963.
3. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1965.
4. *Бугаец А.Н.* Статистические методы при поисках и оценке пегматитов по геохимическим данным. – М.: Недра, 1970.
5. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1973.
6. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1979.
7. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1961.
8. *Григоренко А.Г.* Статистические методы при разведке недр. – К.: Техніка, 1974.
9. *Давид М.* Геоestatистические методы при оценке запасов руд. – Л.: Недра, 1980.
10. *Девис Дж.* Статистика и анализ геологических данных. – М.: Мир, 1977.
11. *Дементьев Л.Ф.* Статистические методы обработки и анализа промыслово-геологических данных. – М.: Недра, 1966.
12. *Дунин-Барковский И.В., Смирнов Н.В.* Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). – М.: Гос. изд. техн. лит., 1955.
13. *Жуков Н.Н.* Вероятностно-статистические методы анализа геолого-геофизической информации. – К.: Вища шк., 1975.
14. *Йерског К.Г., Клован Д.И., Реймент Р.А.* Геологический факторный анализ. – Л.: Недра, 1980.
15. *Кильдишев Г.С., Аболенцев Ю.И.* Многомерные группировки. – М.: Статистика, 1978.
16. *Комаров И.С.* Накопление и обработка информации при инженерно-геологических исследованиях. – М.: Недра, 1972.
17. *Комаров И.С., Хайме Н.М., Бабеньшев А.П.* Многомерный статистический анализ в инженерной геологии. – М.: Недра, 1976.
18. *Крамбейн У., Грейбилл Ф.* Статистические модели в геологии. – М.: Мир, 1968.
19. *Крамер Г.* Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975.
20. *Линник Ю.В.* Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1962.

21. *Малеванный Г.Г., Пирятин В.Д.* Способ наименьших квадратов в гидрогеологических исследованиях и расчетах. – Харьков: ХГУ, 1988.
22. *Матерон Ж.* Основы прикладной геостатистики. – М.: Мир, 1988.
23. *Миллер Р.Л., Кан Дж.С.* Статистический анализ в геологических науках. – М.: Мир, 1965.
24. *Никитин А.А.* Статистические методы выделения геофизических аномалий. – М.: Недра, 1979.
25. *Радионон Д.А.* Статистические методы разграничения геологических объектов по комплексу признаков. – М.: Недра, 1968.
26. *Рыжков П.А., Гудков В.М.* Применение математической статистики для разведки недр земли. – М.: Недра, 1969.
27. *Тархов А.Г., Никитин А.А., Трофимова Т.А.* Обработка геофизических данных. – М.: МГРИ, 1979.
28. *Харман Г.* Современный факторный анализ. – М.: Статистика, 1972.
29. *Щурыгин А.М.* Статистика при подсчете запасов месторождений. – М.: Изд-во МГУ, 1978.

Зміст

Передмова.....	3
1. Основні поняття теорії ймовірностей.....	5
1.1. Класичне і статистичне визначення ймовірності.....	5
1.2. Геометрична ймовірність.....	13
1.3. Властивості ймовірності.....	27
2. Випадкові величини. Розподіли випадкових величин.....	46
2.1. Випадкові величини та їх числові характеристики.....	46
2.2. Гіпергеометричний розподіл.....	76
2.3. Схема Бернуллі. Узагальнена схема Бернуллі. Геометричний розподіл.....	79
2.4. Закон Пуассона.....	89
2.5. Рівномірний розподіл.....	98
2.6. Нормальний розподіл. Центральна гранична теорема.....	101
2.7. Розподіли χ^2 , Стьюдента і Фішера.....	120
2.8. Логнормальний розподіл.....	124
3. Багатовимірні випадкові величини. Кореляція.....	139
3.1. Багатовимірні випадкові величини.....	139
3.2. Парна кореляція.....	148
3.3. Множинна кореляція. Частинна кореляція.....	171
4. Статистичні оцінки.....	185
4.1. Оцінки. Властивості оцінок та методи їх знаходження.....	185
4.2. Таблиця оцінок основних числових характеристик розподілів.....	210
4.3. Оцінка щільності та функції розподілу. Гістограма.	
Оцінки параметрів за згрупованими даними.....	234
4.4. Похибка розрахункового параметра.....	249
5. Метод найменших квадратів.....	269
5.1. Метод найменших квадратів. Постановка задачі.....	269
5.2. Оцінка інтегральних характеристик.....	315

6. Перевірка гіпотез. Класифікація. кластер–аналіз. Факторний аналіз.....	329
6.1. Перевірка гіпотез про параметри розподілів. Критерій Аббе	331
6.2. Критерії згоди.....	357
6.3. Критерії для виділення аномальних спостережень.....	370
6.4. Дисперсійний аналіз. Критерії Бартлетта та Кочрена	381
6.5. Класифікація.....	390
6.6. Кластер – аналіз.....	406
6.7. Факторний аналіз	409
7. Фільтрація випадкових функцій. Спектральні відображення	413
7.1. Випадкові функції. Поняття про лінійний фільтр.....	413
7.2. Фільтрація детермінованого сигналу за максимумом відношення сигнал/завада	422
7.3 Фільтрація випадкового сигналу. Прогноз випадкової функції	443
7.4. Спектральне відображення випадкової функції.....	451
7.5. Варіограма. Поняття про оцінку запасів руд методом крейгінга	456
Додаток	461
Алфавітний покажчик	477
Список літератури	484